ФИЗИКА

УДК 536.24

РАСЧЕТ НАГРЕВА ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ КРУГЛОГО КАНАЛА

Ю.В. ВИДИН, В.С. ЗЛОБИН, Р.В. КАЗАКОВ

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Аннотация: ***предложен приближенный аналитический метод расчета температурного поля в ламинарном потоке жидкости, движущейся в цилиндрическом канале, для случая, когда коэффициент теплообмена на наружной поверхности является произвольной функцией осевой координаты. Благодаря специальному интегральному преобразованию удается граничное условие исследуемой задачи свести к линейному граничному условию второго рода. В этом случае может быть применено классическое математическое решение.***

Ключевые слова: ***ламинарное течение, теплоперенос, распределение температуры, теплообмен.***

Известно, что проблема теплообмена, когда коэффициент конвективной теплоотдачи является произвольной функцией продольной координаты $\left(\alpha = \alpha\left(X\right)\right)$, представляет большой интерес для инженерной практики и ее изучение имеет важное научное значение [1]. В этом направлении существенные достижения были ранее получены в области нестационарной теплопроводности твердых тел различной конфигурации [2]. Эти результаты могут быть успешно использованы и при исследовании процессов переноса энергии в ламинарных потоках жидкости в случаях, когда коэффициенты теплоотдачи на наружных поверхностях труб существенно меняются по их длине. С этой целью рассмотрим ряд типичных примеров.

В общем случае при конвективном подводе тепла к наружной поверхности трубы коэффициент теплоотдачи оказывается, в силу разных причин, в той или иной степени зависящим от продольной координаты, то есть является некоторой математической функцией величины *X*. Если такая зависимость носит существенный характер, то ее безусловно необходимо принимать во внимание. Тогда математическую постановку задачи при использовании безразмерных характеристик процесса можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \Theta}{\partial R} = \left(1 - R^2\right)\frac{\partial \Theta}{\partial X}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0 \text{ при } R = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial R} = -Bi\left(X\right)\Theta \text{ при } R = 1, \tag{3}$$

$$\Theta = 1 \text{ при } X = 0. \tag{4}$$

С математической точки зрения задача (1)−(4) формально является линейной. Однако, если число Bi зависит некоторым произвольным образом от продольной координаты X, т. Е. $Bi = Bi\left(X\right)$, то получить ее строгое аналитическое решения весьма затруднительно. Поэтому для проведения научно-технических расчетов процессов, описываемых приведенной системой уравнений, целесообразно использовать эффективные приближенные соотношения.

В частности, такие расчетные зависимости удается получить, если воспользоваться предложенным ранее методом интегральных преобразований. Применительно к поставленной задаче (1)−(4) наиболее подходящим является введение новой независимой переменной $\vartheta = \ln\Theta$. Отсюда следует, что искомое температурное поле Θ связано с промежуточной функцией ϑ выражением

$$\Theta = \exp(-\vartheta)\,, \tag{5}$$

где знак «−» обусловлен тем, что безразмерная температура Θ стремится к нулю при возрастании осевой координаты канала *X*.

При переходе от Θ к ϑ система (1)−(4) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\vartheta}{\partial R} - \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right)^2 = \left(1 - R^2\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial X}\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial R} = 0 \text{ при } R = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial R} = Bi\left(X\right) \text{ при } R = 1\,, \tag{8}$$

$$\vartheta = 0 \text{ при } X = 0\,. \tag{9}$$

При этом были использованы зависимости вида:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial X} = -\exp(-\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial X}\,,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial R} = -\exp(-\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\,,$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial R^2} = -\exp(-\vartheta)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial R^2} + \exp(-\vartheta)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right)^2.$$

Таким образом, с помощью подстановки выражения (5) рассматриваемая задача с граничными условиями третьего рода преобразуется к задаче с внешним граничным условием второго рода, которая в математическом отношении считается более простой. Однако при этом в дифференциальном уравнении энергии (6) появляется нелинейный комплекс $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right)^2$, что, естественно, затрудняет процедуру интегрирования. Если влияние данного нелинейного члена в дифференциальном уравнении (6) не слишком существенно, то тогда, пренебрегая им, удается получить замкнутое аналитическое решение модифицированной задачи (6)−(9), которая при этом условии относится к классу линейных.

При этом следует считать, так как комплекс $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial R}\right)^2$ положительный, то тогда использование рекомендованной приближенной математической зависимости приводит к завышенным значениям искомого температурного поля.

В большинстве случаев, встречающихся на практике, основной интерес представляет режим упорядоченного течения потока жидкости в каналах, который имеет место при значениях продольной координаты *X*, превышающих некоторую величину X^*. Обычно числовые значения X^* не более 0,2. Для такого теплового режима распределение температуры по сечению на входе в канал (X=0) не играет существенной роли. Благодаря этому обстоятельству математическое выражение для расчета формирующегося температурного поля за пределами начального участка линеаризованной задачи оказывается сравнительно несложным.

Интегрирование при указанных допущениях системы уравнений (6)–(9) для канала круглого сечения приводит к результату в виде следующего ряда:

$$\vartheta = 4\int_0^X Bi(\eta)\,d\eta + Bi(X)P_1(R) + Bi'(X)P_2(R) + Bi''(X)P_3(R) + \ldots,$$

где $P_1(R) = R^2 - \frac{1}{4}R^4 - \frac{7}{24}$.

Последующие полиномы находятся на основе решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$P_2''(R) + \frac{P_2'(R)}{R} = \left(1 - R^2\right)P_1(R),$$

$$P_3''(R) + \frac{P_3'(R)}{R} = \left(1 - R^2\right)P_2(R),$$

$$P_{n+1}''(R) + \frac{P_{n+1}'(R)}{R} = \left(1 - R^2\right)P_n(R).$$

При этом необходимо соблюдать граничные условия

$$P_{n+1}'(0) = 0 \text{ и } P_{n+1}'(1) = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что полином $P_2(R)$ должен иметь вид

$$P_2(R) = -\frac{7}{96}R^2 + \frac{31}{384}R^4 - \frac{5}{144}R^6 + \frac{1}{256}R^8 + C_2. \tag{10}$$

Постоянная C_2 определяется из условия

$$\int_0^1 P_2(R)R\left(1 - R^2\right)dR = 0. \tag{11}$$

Подставляя (11) в формулу (10), получим: $C_2 = \frac{27}{1920}$.

Таким образом, окончательно $P_2(R)$ запишется:

$$P_2(R) = -\frac{7}{96}R^2 + \frac{31}{384}R^4 - \frac{5}{144}R^6 + \frac{1}{256}R^8 + \frac{27}{1920}. \tag{12}$$

Очевидно, что при $R = 0$ (ось канала) $P_2(0) = \frac{27}{1920}$, а для $R = 1$ (поверхность канала) $P_2(1) = -\frac{103}{11520}$.

Аналогичным образом могут быть получены выражения для $P_3(R)$, $P_4(R)$ и т.д. При этом, естественно, громоздкость математических операций все более и более возрастает. Однако нужно иметь в виду, что числовые значения полиномов $P_n(R)$ с ростом порядкового номера n быстро уменьшаются. Поэтому для практических расчетов, как правило, достаточно учитывать только слагаемые, содержащие $P_1(R)$ и $P_2(R)$.

Принципиально возможно получить решения для всего интервала значений осевой координаты X, т.е. учесть и начальный участок трубы. В этом случае искомое решение задачи (6)−(9) может быть представлено формально в виде

$$\vartheta(X,R)=4\int_0^X Bi(\eta)\,d\eta\;-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 A_n K_n(R)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)\int_0^X Bi(\eta)\exp\left(\mu_n^2\eta\right)d\eta \qquad (13)$$

где μ_n и $K_n(R)$ − характеристические числа, и собственные функции данной задачи.

В большинстве случаев, имеющих место на практике, особый интерес представляет характер изменения температуры поверхности канала (R=1). Из зависимости (13) следует, что

$$\vartheta(X,1)=4\int_0^X Bi(\eta)\,d\eta\;-$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 A_n K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)\int_0^X Bi(\eta)\exp\left(\mu_n^2\eta\right)d\eta \qquad (14)$$

Согласно методики, разработанной в работе [3], выполнив интегрирование по частям под знаком бесконечной суммы в (14), можно получить

$$\vartheta(X,1)=4\int_0^X Bi(\eta)\,d\eta-2Bi(X)\sum_{n=1}^{\infty}A_n K_n(1)+$$

$$+2Bi(0)\sum_{n=1}^{\infty}A_n K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)\int_0^X Bi'(\eta)\exp\left(\mu_n^2\eta\right)d\eta\,. \qquad (15)$$

Повторив еще раз подобную операцию по отношению к зависимости (15), будем иметь

$$\vartheta(X,1)=4\int_0^X Bi(\eta)\,d\eta-2Bi(X)\sum_{n=1}^{\infty}A_n K_n(1)+$$

$$+2Bi(0)\sum_{n=1}^{\infty}A_n K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)+$$

$$+2Bi'(X)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)-2Bi'(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2 X\right)\int_0^X Bi''(\eta)\exp\left(\mu_n^2\eta\right)d\eta\,.$$

Так как неограниченные суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)$$

могут быть свернуты и соответственно равны значениям:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)=-\frac{11}{48},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)=-\frac{103}{23040},$$

то окончательно формула (15) примет вид

$$\vartheta(X,1)=4\int_0^X Bi(\eta)\,d\eta+\frac{11}{24}Bi(X)+$$

$$+2Bi(0)\sum_{n=1}^{\infty}A_nK_n(1)\exp\left(-\mu_n^2X\right)-$$

$$-\frac{103}{11520}Bi'(X)-2Bi'(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2X\right)-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)\exp\left(-\mu_n^2X\right)\int_0^X Bi''(\eta)\exp\left(\mu_n^2\eta\right)d\eta. \qquad (16)$$

Использование числовых величин μ_n^2, A_n, $K_n(1)$ (табл. 1), а так же комплексов

$$A_nK_n(1),\ \frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1) \text{ и } \frac{A_n}{\mu_n^4}K_n(1)$$

(табл.2) существенно упрощает процедуру нахождения функции $\vartheta(X,1)$ по выражению (16).

Таблица 1

Значения μ_n^2, A_n и $K_n(1)$ в решении (16) для круглого канала

n	μ_n^2	A_n	$K_n(1)$
1	25,6746	0,201741	−0,492517
2	83,8618	−0,087555	0,395508
3	174,167	0,052797	−0,345872
4	296,536	−0,0366402	0,314047
5	450,947	0,0275178	−0,291252
6	637,387	−0,0217415	0,273808
7	855,850	0,0177985	−0,259852

Таблица 2

Значения комплексов $A_nK_n(1)$, $\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)$ и $\frac{A_n}{\mu_n^4}K_n(1)$ в решении (16) для круглого канала

N	$A_nK_n(1)$	$\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)$	$\frac{A_n}{\mu_n^4}K_n(1)$
1	−0,0993609	−0,0038693	−0,0001507
2	−0,0346287	−0,0004129	−0,000049
3	−0,0182610	−0,0001048	−0,0000006

Продолжение таблицы 2

4	−0,0115067	−0,0000388	−0,0000001
5	−0,0080146	−0,0000178	0
6	−0,0059530	−0,0000093	0
7	−0,0046250	−0,0000054	−0,000000006

Из табл.2 видно, что комплекс $\frac{A_n}{\mu_n^4}K_n(1)$ очень резко уменьшается с возрастанием порядкового номера *n*. Поэтому в решении (16), как правило, достаточно ограничиться одним лишь первым членом последней бесконечной суммы в правой его части. Из табл.2 также следует, что конечная сумма $\sum_{n=1}^{7}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)$ дает величину

$$\sum_{n=1}^{7}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)=-0,0044529,$$

которая практически совпадает с приведенным ранее значением для бесконечной суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\mu_n^2}K_n(1)=-\frac{103}{23040}=-0,0044705.$$

Переход от функции $\vartheta(X,R)$ к фактическому температурному полю $\Theta(X,R)$ производится с помощью выражения (5). При этом, как отмечалось ранее, температура $\Theta(X,R)$ оказывается несколько завышенной по сравнению с действительной, то есть ее можно рассматривать как верхнюю границу для истинного распределения температуры.

Summary

An approximate analytical method for calculating temperature distribution in laminar flow, that moving in cylindrical channel. In case where the heat transfer coefficient on the outer surface of arbitrary function on the axial coordinate. Special integral transformation turns the task boundary condition to linear second kind boundary condition. In this case can be applied a classical mathematical solution.

Литература

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: "Энергия", 1967. 412 с.

2. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск; Красноярский политехнический институт, 1974. 144 с.

3. Видин Ю.В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск: Изд-во Красноярского государственного университета, 1992. С. 92.

Поступила в редакцию ***11 ноября 2015 г.***

Видин Юрий Владимирович – канд. техн. наук, профессор кафедры «Тепловые электрические станции» (ТЭС) Политехнического института Сибирского федерального университета (СФУ). г. Красноярск. Тел: 8(391)249-74-13. E-mail: roman.kazakov@list.ru.

Злобин Виктор Семенович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Тепловые электрические станции» (ТЭС) Политехнического института Сибирского федерального университета (СФУ). г. Красноярск. Тел:8(931)519-40-71. E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

Казаков Роман Владимирович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Тепловые электрические станции» (ТЭС) Политехнического института Сибирского федерального университета (СФУ), г. Красноярск. Тел:8(913)597-19-50. E-mail: roman.kazakov@list.ru.