УДК 532.546+532.55 DOI:10.30724/1998-9903-2020-22-5-28-40

МЕТОД ВСТРОЕННЫХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Л.Э. Меламед

Акционерное общество «Интеллект», г. Москва, Россия
lev.melamed@yandex.ru

РЕЗЮМЕ: *ЦЕЛЬ. Цель работы – нахождение метода математического моделирования и анализа неоднородных физических полей и влияния внутренних структур на эти поля.. Ищутся решения в областях, в которых существуют подобласти с уже известным поведением («встроенные» области и встроенные решения). Целью является нахождение метода моделирования, не требующего изменения уже существующих программных средств и связанного только с модификацией правых частей рассматриваемых уравнений. МЕТОД. Предлагаемый метод математического моделирования характеризуется использованием характеристических функций для задания геометрического расположения и формы встроенных областей, для задания систем встроенных областей (например, шарообразных засыпок или турбулентных вихрей) без задания их как геометрических объектов, для модификации расчетного дифференциального уравнения в пределах встроенных областей. РЕЗУЛЬТАТЫ. Сформулирована и доказана (в виде утверждения) теорема, формализующая суть предлагаемого метода и дающая алгоритм его применения. Этот алгоритм состоит в а) представлении дифференциального уравнения задачи в другой аналитической форме; в этой форме к исходному дифференциальному уравнению (к его правой части) добавлен член, при наличии которого это уравнение дает заранее заданное («встроенное») решение в необходимых областях и б) представлении искомого решения (с помощью характеристической функции) в виде, в котором это решение имеет вид либо искомой функции (в основной области), либо заданных функций (во встроенных областях). Представлены примеры расчетов из двух физико-технических областей – теплопроводности и гидродинамики. Результатом работы является также расчет турбулентного течения в трубе, в которой задана система шаровых вихрей, скорости и направления вращения этих вихрей. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Предложенный метод позволяет моделировать сложные физические процессы, в том числе турбулентность, апробирован, достаточно прост и незаменим в случаях, когда встроенные структуры могут быть заданы только программным образом.*

Ключевые слова*: турбулентность, моделирование, вихревые структуры, встроенные области.*

Благодарности*: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, проект № 18-08-00051а).*

Для цитирования: Меламед Л.Э. Метод встроенных решений в моделировании турбулентности // Известия высших учебных заведений. ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ. 2020. Т. 22. № 5. С. 28-40. doi:10.30724/1998-9903-2020-22-5-28-40.

BUILT-IN TURBULENCE MODELLING SOLUTION METHOD

LE. Melamed

Joint-stock company " Intelligence ", 117246 г. Moscow, Russian Federation
lev.melamed@yandex.ru

Abstract: *THE PURPOSE. The aim of the work is to find a method for mathematical modeling and analysis of inhomogeneous physical fields and the influence of internal structures on these fields. Solutions are sought in areas in which there are subdomains with already known behavior (“embedded” areas and embedded solutions). The goal is to find a modeling method that does not require a change in existing software and is associated only with the modification of the right-hand sides of the equations under consideration. METHODS. The proposed method of mathematical modeling is characterized by the use of characteristic functions for specifying the* *geometric location and shape of embedded areas, for specifying systems of embedded areas (for example, spherical fillings or turbulent vortices) without specifying them as geometric objects, for modifying the calculated differential equation within the embedded areas. RESULTS. A theorem is formulated and proved (in the form of a statement) that formalizes the essence of the proposed method and gives an algorithm for its application. This algorithm consists in a) representation of the differential equation of the problem in another analytical form; in this form, a term is added to the original differential equation (to its right-hand side), in the presence of which this equation gives a predetermined ("built-in") solution in the necessary regions and b) a representation of the desired solution (using the characteristic function) in the form in which this solution takes the form of either the desired function (in the main area) or the specified functions (in the embedded areas). Examples of calculations from two physical and technical areas - thermal conductivity and hydrodynamics are presented. The result of the work is also the calculation of a turbulent flow in a pipe, in which a system of ball vortices, the speed and direction of rotation of these vortices are specified. CONCLUSION. The proposed method makes it possible to simulate complex physical processes, including turbulence, has been tested, is quite simple and indispensable in cases where embedded structures can be specified only by software.*

Keywords: *turbulence, modeling, vortex structures, embedded areas.*

Acknowledgments*: This work is fulfilled with financial support of the Russian fund of basic researches (RFFI, the project № 18-08-00051a).*

For citation: Melamed LE. Bilt-in turbulence modelling solution method. *Power engineering: research, equipment, technology*. 2020;22(5):28-40. doi:10.30724/1998-9903-2020-22-5-28-40.

Введение

Во всех областях энергетики, традиционной и инновационной, во всех ее процессах и аппаратах основным режимом движения жидкостей и газов является турбулентный. Такой же режим движения присутствует в огромном числе явлений природы, отраслей науки и техники. Изучение этого режима в сфере энергетики вызывается отнюдь не только интересами чистой науки, но и, в большой степени, вопросами экономики. Гипотетическая возможность хотя бы частичного «обуздания» турбулентности – в отношении уменьшения гидродинамического сопротивления, т.е. турбулентных потерь и затрат на прокачку потоков – сулит огромные экономические выгоды. Но трудности изучения этого явления таковы, что даже наступление с самых разных сторон не привело пока к решающему продвижению в этой области. Одной из таких сторон является компьютерное моделирование процесса. Именно этой задаче посвящена данная работа.

Литературный обзор

Теме моделирования турбулентности посвящено огромное число работ и обзоров (см. например, [1,2]. Однако, если под моделированием понимать не только расчет уравнения или системы уравнений, с той или иной степенью достоверности описывающих процесс, но и воспроизведение физической картины процесса, то это число существенно уменьшается. Еще меньшее число работ посвящено тому, как воспроизвести детальную картину процесса с возможностью достаточно простого варьирования размеров и форм ее характерных составляющих, турбулентных структур – вихрей, вихревых колец, их кластеров, фрактальных структур. Данная работа посвящена именно такому моделированию. Это моделирование, кроме расчетных результатов, может иметь и прямое практическое значение. Так, оно может привести к нахождению и объяснению способов уменьшения гидродинамического сопротивления турбулентных структур жидкости введением различных добавок.

Необходимость введения в рассмотрение конкретных структур создает существенные трудности. Дело в том, что в современном стандартном компьютерном моделировании геометрический вид области моделирования (и ее внутренних подобластей, если они есть), задается, как правило, вручную, складывается из набора некоторых «примитивов» – линий, прямоугольников, параллелепипедов, окружностей, шаров, цилиндров, конусов. Имеется и возможность «размножения» этих объектов. Но в турбулентности, кроме относительно простых структур, таких, как шаровые вихри и вихревые кольца, участвуют фрактальные структуры каскадного типа, которые невозможно «нарисовать» вручную и, тем более, перерисовывать от расчета к расчету. Такие структуры и их видоизменения можно задавать только программным образом. При этом упор делается не на внешние границы расчетной области, которые, как правило, достаточно просты, а на внутренние структуры, для которых надо задать не только их форму и размеры, но и их поведение (скорость, поступательную и/или вращательную, температуру, мощность источника и т.п.). Основы именно такого, программного метода формирования исходных данных для моделирования, причем не только для гидродинамических задач, но и для других областей техники, предлагаются в данной работе. В качестве примера из другой области представлено решение задачи теплопроводности.

Данная работа является продолжением ряда работ, посвященных расчету турбулентных течений как течений с внутренними сопротивлениями, полностью распределенными [3] или сосредоточенно-распределенными («вихревая засыпка») [4,5]. В них были разработаны и применены методы, позволяющие решать широкий класс задач. К таким методам относится метод локальных флуктуаций [4], позволяющий моделировать турбулентность и другие неоднородные среды [5] с помощью локального изменения их физических свойств. В отличие от этого излагаемый далее метод встраивания локально-заданных решений позволяет моделировать турбулентные течения и другие среды с локально-различным поведением, не меняя, даже локально, их физические свойств. Он позволяет выделить область или систему внутренних областей, которые требуются для выбранной модели, задать их геометрию и решения в них. Оказалось, что для этих целей чрезвычайно полезно понятие характеристической функции, примененной к пространству и позволяющей выделить из пространственной области ее часть или систему частей. В работах [2,3] такие функции использовались для заданной модификации физических свойств некоторых областей среды. В данной работе характеристические функции применены для конструирования решаемого уравнения и искомого решения с тем, чтобы в разных областях расчетного поля они имели разный вид.

Сфера применения метода достаточно велика. При моделировании турбулентности можно задать систему вихрей или иных структур, вращающихся с заданными окружными скоростями в заданных направлениях и при этом движущихся с заданной скоростью. Задавая возможные варианты распределения положений, размеров вихрей и их окружных скоростей, можно не только находить поля скоростей, в частности – в окрестностях этих структур, но и рассчитывать поля давления. С помощью задания нулевой скорости в некоторых подобластях можно решать задачи обтекания неподвижных тел и их комбинаций (например, шаровых засыпок [6], что необходимо для расчетов тепловыделяющих сборок из микротвэлов в инновационной атомной энергетике. При теоретической оценке основных констант турбулентности будет возможен и полезен дополнительный анализ трансформации вихревых диполей [7]. Метод впрямую применим к ведущейся в настоящее время большой группе работ: по исследованию связи изменений формы вихревых диполей с движением несущего их потока [8], изучению динамики ламинарно-мелких вихревых диполей [9], анализу структуры и взаимодействия струй и подповерхностных вихрей [10] и к другим задачам, связанным с конкретными формами вихревых структур.

Теория метода

Рассмотрим постановку, формализацию и метод решения таких задач, которые можно назвать задачами с локально-вложенными решениями. Эти решения или, точнее, поведение среды являются заданными в локальных внутренних или приграничных частях пространственной расчетной области. Результатом должно быть решение задачи для всей расчетной области, с автоматическим «сшиванием» решений для всех подобластей и получением непрерывного решения-результата.

Пусть нам известно решение (например, программное) некоторой задачи А для уравнения $L(u)=F$ (назовем его основным) в области Ω с краевым условием $l(u)=S$. Рассмотрим задачу В, которая отличается от А только тем, что внутри области Ω (возможно, с выходом на ее границу) выделена некоторая подобласть Ω_1, на которой вместо искомого решения u задана функция f, удовлетворяющая основному уравнению. Требуется на основе решения задачи А получить (в виде непрерывной функции) решение задачи В, выполнив следующие условия: использовать программу решения задачи А, не задавать область Ω_1 геометрически на расчетном поле и не задавать условий на её границе $\partial\Omega_1$. Иными словами, решение задачи В должно удовлетворять основному уравнению в области $\Omega\backslash\Omega_1$ (Ω без Ω_1) и условию $u=f$ в подобласти Ω_1, включая ее границу, причем эти части решения должны сопрягаться между собой по общей части границ этих областей.

Представим искомое решение в виде

$$v=u(1-\theta)+f\theta$$

и выпишем следующее операторное уравнение

$$L(u)(1-\theta)+L(v)\theta=F.$$

Здесь θ – характеристическая функция области Ω_1, равная единице внутри и на границе этой области и нулю вне ее. Эти соотношения являются основой следующего утверждения.

Пусть требуется решить задачу А, состоящую из двух частей:

a) уравнения $L(u)=F, \quad x \in \Omega$ (1)

с краевым условием $l(u)=S, \quad x \in \partial\Omega$ (2)

в заданной области Ω, и

b) условия $u=f(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1$, (3)

где $\Omega_1 \subset \Omega$ – некоторая область, находящаяся внутри (или частично выходящая на границу) области Ω, $\overline{\Omega}_1$ – ее замыкание, а f – заданная функция, удовлетворяющая уравнению

$$L(f)=F \tag{4}$$

Рассмотрим другую задачу – задачу В, отличающуюся от А в двух отношениях: во-первых, в ней отсутствует условие *b*) задачи А и, во-вторых, уравнение (1) имеет вид

$$L(u)=F+G, \tag{5}$$

где

$$G=[L(u)-L(v)]\theta, \tag{6}$$

$$v=u(1-\theta)+f\theta, \tag{7}$$

а функция θ является характеристической функцией замкнутой области Ω_1. Утверждается, что при этих условиях решение задачи В, заданной на той же области Ω, с тем же условием (2), является решением задачи А.

Доказательство этого утверждения таково. Рассмотрим значения θ=1 и θ=0. При θ=1 (т.е. в области Ω_1 и на её границе $\partial\Omega_1$) из (5,6) имеем

$$L(v)=F. \tag{8}$$

Решение этого уравнения при θ=1 есть $u=f$. Действительно, при подстановке $u=f$ в (7) и затем результата (при θ=1) в (8) получаем выполняемое по заданному условию тождество (4). При θ=0 (т.е. в области $\Omega\backslash\Omega_1$) имеем уравнение (1) с выполненным на границе $\partial\Omega_1$ условием (3). Таким образом, задача В содержит все уравнения и условия задачи А. Утверждение доказано.

Рассмотрим некоторые частные случаи и дополнения.

1. Когда оператор L – линейный, имеем

$$G=[L(u-v)]\theta=L[(u-f)\theta] \tag{9}$$

(повторного применения функции θ не требуется).

2. Когда оператор L состоит из двух частей, т.е. уравнение имеет вид

$$L_1(u)=L_2(u)+F \tag{10}$$

(в частности, в гидродинамических уравнениях движения), модификация уравнения такова: $L_1(u)=L_2(u)+G+F$, где $G=[L_1(u)-L_1(v)-(L_2(u)-L_2(v))]\theta$,

и при θ=0 имеем (10), а при θ=1 получаем $L_1(f)=L_2(f)+F$ (условие, равносильное условию (4)).

3. При задании двух и более встраиваемых областей и функций на них выражения (6,7) становятся такими

$$G=\sum_i [L(u)-L(v_i)]\theta_i \quad , \quad v_i=u(1-\sum_i \theta_i)+\sum_i f_i\theta_i \tag{11}$$

Доказательства справедливости этого утверждения не потребуется, если заметить, что для каждой области i (внутри и на ее границе), где $\theta_i=1$, все остальные множители θ_i равны нулю и поэтому все остальные слагаемые отсутствуют, и задача возвращается к исходной постановке с одной встраиваемой областью, которая рассмотрена выше.

Итак, задание суммы в выражениях (11) позволяет осуществить встраивание нескольких областей сразу и получить общий результат, включающий все функции f_i, при однократном решении задачи. Сложение здесь имеет не арифметический, а алгоритмический смысл, позволяющий объединить в одну задачу условия, относящиеся к разным, непересекающимся пространственным областям.

4. Необходимо отметить, что величины G в физических задачах имеют четкий физический смысл. Это именно те воздействия, которые создают и поддерживают во встраиваемых областях задаваемые там профили соответствующих физических величин.

Замечания

1. Реализация предлагаемой методики особенно проста при возможности задания функций F и θ в компьютерной программе в аналитической форме, с использованием всех

переменных. Такими возможностями обладают, в частности, системы *Matlab* и *Comsol Multiphysics*. На основе последней выполнены приведенные ниже примеры.
2. Если для заданной функции f уравнение (3) не выполняется, то решение внутри подобласти Ω_1 будет неправильным, но условия на ее границе все равно будут выполнены, и решение для области $\Omega\backslash\Omega_1$ будет правильным.
3. Стоит отметить, что из разности операторов *L(v)-L(u)* автоматически «исчезают», взаимно сокращаются члены этих операторов, не подвергающиеся изменениям в данной конкретной задаче. Поэтому эти операторы могут сразу иметь усеченный вид. В них должны присутствовать только слагаемые, содержащие присутствующие в функциях f зависимые переменные. Так, в гидродинамических задачах при задании f как скорости в G не участвует градиент давления и, наоборот, при задании f как градиента давления в G не будут фигурировать скорости.

Примеры

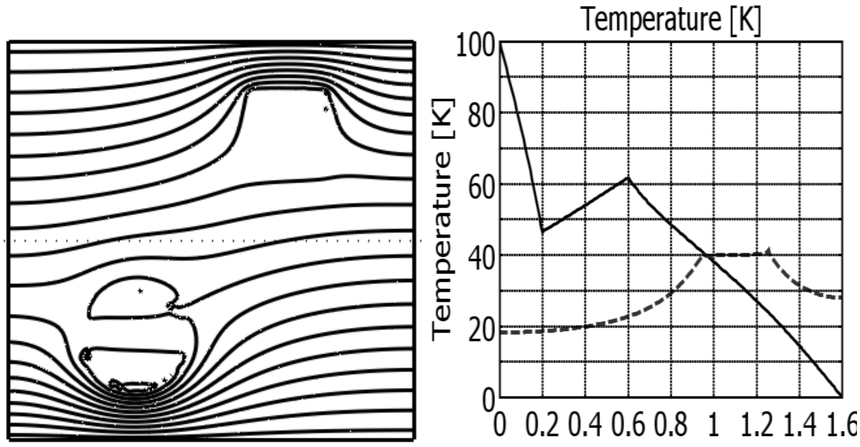
Приведем примеры применения метода.

1. Чтобы показать, что метод обладает большой общностью и пригоден не только для задач гидродинамики, которым посвящена вся последующая часть статьи, рассмотрим задачу теплопроводности. Требуется рассчитать плоское стационарное температурное поле $u(x,y)$ в квадратной области $\Omega=\{-0.8<x,y<0.8\}$ с двумя встроенными подобластями - кругом и прямоугольником. В круге Ω_1 радиуса R=0.2 с центром в точке x_0=-0.3, y_0=0.4 (в левом нижнем углу области) поддерживается заданный профиль температуры $f_1(x,y)=70+40y$. В правом верхнем углу расчетного поля задана прямоугольная область Ω_2 ($a_1\le x\le a_2$, $b_1\le y\le b_2$) с заданной постоянной температурой f_2=40 (размерности приводимых величин несущественны). Заданы граничные условия: на горизонтальных сторонах квадрата - постоянные температуры (u=100 внизу, u=0 вверху), вертикальные стороны теплоизолированы. Вне заданных областей Ω_1 и Ω_2 температурное поле неизвестно и должно быть рассчитано.

Рассмотрим решение этой задачи в компьютерной системе *Comsol.* Расчетная область (квадрат) впрямую рисуется в графическом окне, однако заданные области Ω_1 и Ω_2 вообще не рисуются. Область Ω_1 (круг) зададим характеристической функцией $\theta_1(x,y)=\eta(r)-\eta(r-R)$, где η – единичная функция Хевисайда и $r^2=x^2+y^2$. Область Ω_2 (прямоугольник) задается функцией $\theta_2=[\eta(x-a_1)-\eta(x-a_2)][[\eta(y-b_1)-\eta(y-b_2)]$, где (a_1,b_1), (a_2,b_2) – координаты вершин прямоугольника.

С учетом линейности оператора Лапласа $L=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2$ и в соответствии с формулами (9) и (13) получаем модифицированную задачу *L(u)=G*, где $G=L[(u-f_1)\theta_1+(u-f_2)\theta_2]$ – модифицированная правая часть, заданная аналитически с помощью заданных функций f_1 и f_2, сконструированных нами характеристических функций θ_1 и θ_2 и имеющихся в системе *Comsol* функций (частных производных от искомых переменных).

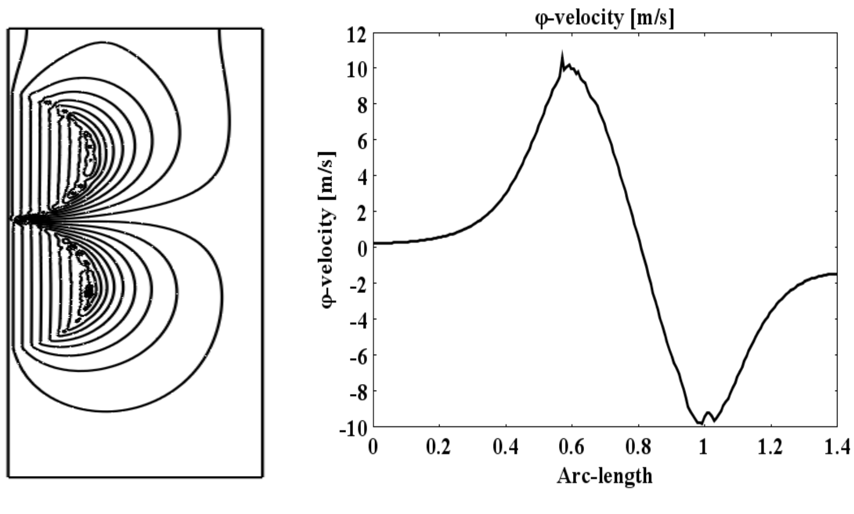
Результаты решения задачи представлены на рис.1. Поскольку области Ω_1 и Ω_2 геометрически никак не заданы, их контуры можно увидеть только по картине изотерм, представленной на рис.1*a*. Наличие и правильность воспроизведения заданных функций f_1 и f_2 отражают сечения температурного поля на рис.1*b* – вертикальное сечение через центр круга (при x=0.4, снизу вверх, сплошная линия) и горизонтальное через центр прямоугольника (при y=0.5, справа налево, штриховая линия). Этот пример представлен очень кратко, поскольку подробности метода будут представлены в дальнейших примерах.



a b

Рис.1 Температурное поле квадратной области с заданными температурами во встроенных областях – круглой и прямоугольной; *a*) изотермы, *b*) температуры: по вертикальному среднему сечению круга (снизу вверх, сплошная линия) и по горизонтальному среднему сечению прямоугольника (справа налево, пунктирная линия).

2. Перейдем теперь к гидродинамическим задачам – от простых к сложным. Сначала рассмотрим задачу поиска поля скоростей вблизи гипотетической турбулентной структуры, представляющей собой два шаровых вихря, расположенных рядом, но вращающихся в разные стороны. Постановка задачи такова. Через участок трубы радиусом 0,6 м и длиной 1,4 м течет жидкость с ламинарным профилем осевой скорости v на входе (средняя скорость равна 2 м/сек) и условиями прилипания на стенках. На оси трубы, достаточно далеко от входа, вращается с окружной скоростью $f_1=cr$ (c=50 1/сек) круглый вихрь радиуса R=0,2 м. Второй такой же вихрь, но вращающийся в противоположную сторону (f_2=-cr), расположен на оси выше и почти касается первого (рис.2). Такая схема отличается от реального диполя (см. например, [11]), сохраняя сходство только вращением объемов в разные стороны. Требуется рассчитать поле скоростей и давления во всей расчетной области.



a *b*

Рис. 2. Два жидких шара, вращающиеся в противоположные стороны вокруг вертикальной оси, *a* – линии равных окружных скоростей, *b* – профиль окружной скорости в вертикальном сечении через вершины шаров.

Задача описывается следующей системой уравнений движения в цилиндрической осесимметричной системе координат [12]:

$$\rho(uu'_r + vv'_z - \frac{1}{r}w^2) = -p'_r + \eta(u''_{rr} + u''_{zz} + \frac{1}{r}u'_r - \frac{1}{r^2}u) + F_r$$

$$\rho(uv'_r + vv'_z) = -p'_z + \eta(v''_{rr} + v''_{zz} + \frac{1}{r}v'_r) + F_z \qquad (12)$$

$$\rho(uw'_r + vw'_z + \frac{1}{r}uw) = -p'_\varphi + \eta(w''_{rr} + w''_{zz} + \frac{1}{r}w'_r - \frac{1}{r^2}w) + F_\varphi$$

Скорость u направлена по радиусу r, скорость v – по оси симметрии z, окружная скорость w (вокруг оси z) не зависит от угла поворота φ. Искомая функция G состоит теперь из трех компонент – G_r, G_z, G_φ.

Характеристические функции шаров зададим тем же образом, как и круг выше, а именно: $\theta_i(r,z) = \eta(t_i) - \eta(t_i - R)$, где η – единичная функция Хевисайда и $t_i = \sqrt{(r - r_i)^2 + (z - z_i)^2}$; r_i, z_i – координаты центров шаровых вихрей. Искомая окружная скорость (w с тильдой, см. ниже) соответствует второму из выражений (11).

Выделяя члены, в которые входит окружная скорость, уравнения системы (12) в сгруппированном виде можно представить так:

$$L_{1ar}(u,v) + L_{1br}(w) = L_{2r}(u,v) + F_r$$
$$L_{1z}(u,v) = L_{2z}(u,v) + F_z$$
$$L_{1\varphi}(w) = L_{2\varphi}(w) + F_\varphi$$

В первом уравнении (по r) таким членом является $L_{1br}(w) = -(\rho / r)w^2$, в третьем (по φ) – почти все его слагаемые.

Рассмотрим первое уравнение. Функция G_r равна

$$G_r = -L_{1br}(\tilde{w}) + L_{1br}(w) = (\rho / r)(f^2 - w^2)\theta$$

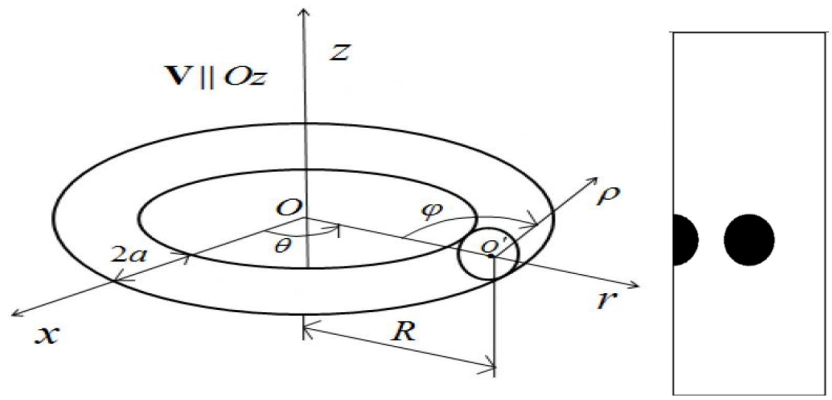
Функция G_z равна нулю, т.к. в этом уравнении (по z) изменений не происходит.
Обратимся к третьему уравнению системы. Оно имеет вид (9). Поскольку все его члены линейны по w, то функция G_φ зависит от разностей $(f_i - w)\theta_i$ и равна

$$G_\varphi = \sum L_{2\varphi}((f_i - w)\theta_i) - \sum L_{1\varphi}((f_i - w)\theta_i)$$

(общий множитель θ опущен, его действие заменяют «внутренние» функции θ). Итак, к правой части системы $F=\{F_r, F_z, F_\varphi\}$ почленно добавляется функция $G=\{G_r, 0, G_\varphi\}$.

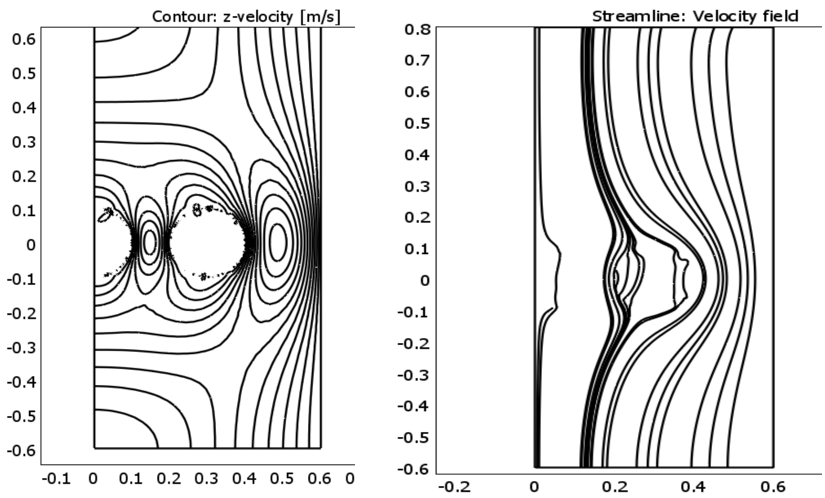
На рис.2 представлены некоторые результаты расчета. На рис.2а представлено осевое сечение вертикально расположенной трубы. Левая грань прямоугольника – ось трубы, нижняя – входное сечение. Представлены контуры одинаковых окружных скоростей, дающие представление о расположении и размерах шаровых вихрей, поскольку геометрически они никак не отображаются. На рис.2b дано поле окружных скоростей w в вертикальном сечении через вершины вихрей. Видно, что на поверхностях вихрей скорость $w=cR$=10 м/сек и $w= -cR= -10$ м/сек (т.е. в противоположных направлениях).

3. Рассмотрим некоторые элементы предлагаемой методики на следующем примере, суть которого иллюстрируется рисунками 3*a* и 3 *b*. В трубе снизу вверх течет жидкость, скорость которой на входе имеет ламинарный профиль. На стенке, как обычно, условия прилипания. В трубе выделены две структуры, часто наблюдающиеся в турбулентных потоках – шаровой вихрь и вихревое кольцо.Объемы жидкости, охватываемые этими структурами, «остановлены» с помощью задания функции (см. формулу (3)) равной нулю. Таким образом, задано, что внутри и на границах этих объемов (описывамых своими характеристическими функциями θ_1 и θ_2) скорости $u=v=0$. Эти функции (и описываемые ими объемы) представлены на рис 4. Линии тока данного течения представлены на рис. 4*b*.



a *b*

Рис.3. Иллюстративные схемы. *a*) одиночное вихревое кольцо, *b*) вихревое кольцо и осевой вихрь.



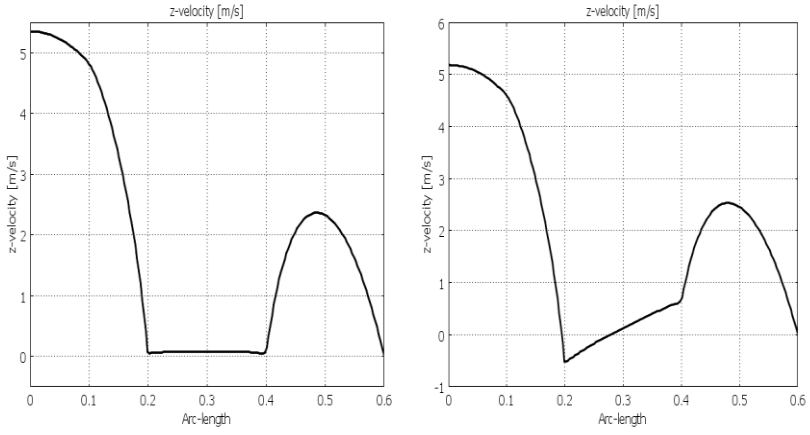
a *b*

Рис.4. Контуры осевых скоростей (*a)* и линии тока (*b*) для связки «вихревое кольцо и осевой вихрь» (см. рис.3b).

Видно, что «остановленные» объемы создают некоторые препятствия для потока, и поэтому не все линии тока могут через них пробиться. Дополнительной иллюстрацией этого явления служит рис 4*a*, на котором представлены контуры равных скоростей потока. Следует отметить, что такое же явление – малая «прозрачность» для потока – имеет место не только для неподвижных, но и для движущихся вместе с потоком, но вращающихся объемов.

Если положить θ_1=0, то шар на оси трубы выпадет из рассмотрения и останется только вихревое кольцо. Два его состояния – неподвижное и вращательное – представлены на рис. 5*a* и 5*b*. На первом из них дан профиль осевой скорости по горизонтальному сечению трубы, проходящему через центр сечения кольца. Четко видна нулевая скорость в этом сечении (такая же, как и во всем объеме). На втором из этих рисунков представлена осевая скорость в этом же сечении, когда осевое перемещение кольца осталось нулевым, но задано вращение его сечения в направлении против часовой стрелки. Это вращение задано скоростями $u=\omega(z-z_0)$ и $v=\omega(r-r_0)$, где r_0, z_0 – координаты центра сечения кольца, ω – окружная скорость.

Данные примеры иллюстрируют следующие возможности метода: «остановить» внутреннюю область полностью; остановить ее движение с потоком, но оставить вращение; задать вращение, но не останавливать. Эти возможности будут использованы в расчете полной модели турбулентности в трубе, представленой далее, в модели, в которую вошли обе вышеописанные структуры, кольцевая и шаровая.



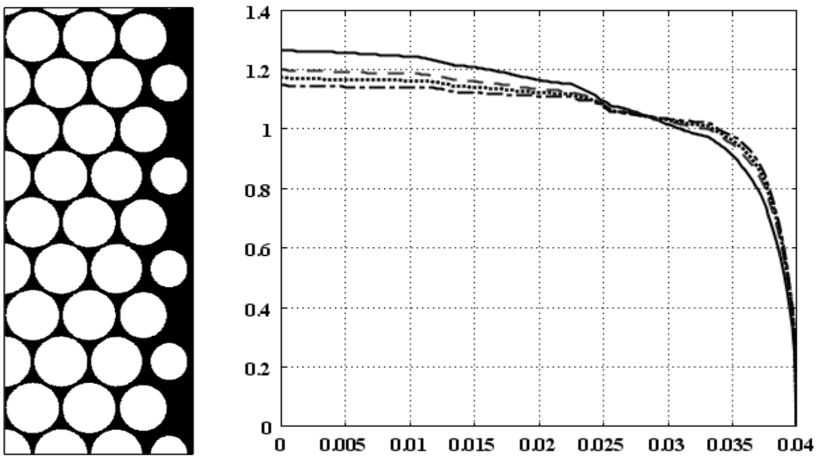
a b

Рис.5. Осевые скорости в горизонтальном сечении через центр остановленного (относительно потока) вихревого кольца. *а)* невращающегося, *b*) вращающегося вокруг оси тора O' (см. рис.3а) против часовой стрелки.

Модель турбулентности и ее реализация

Рассмотрим теперь применение метода к моделированию и анализу турбулентности. Обратимся к примеру, который очень близок к реальной картине турбулентности в трубах. Он основан на концепции о турбулентной «вихревой засыпке» [3-5]. Этот подход к вопросу трактует турбулентное течение как ламинарное, загруженное системой вихревых структур. Такое представление основано на аналогии с течениями в зернистом слое и, как показывают исследования [6,13], имеет с ними много общего. Оно наглядно и помогает изучению процесса.

В рассматриваемой модели турбулентные структуры представлены в виде системы вихревых колец, расположенных в шахматном порядке и движущихся вместе с жидкостью. Кольца представляют собой торы («бублики») разных радиусов, нанизанных на ось потока. Одно такое кольцо представлено на рис.1. Радиусы сечений вихревых колец уменьшаются от оси к стенкам в соответствии с известным профилем турбулентного сопротивления [5]. Расчетная область представляет собой осевое сечение отрезка трубы, расположенного вертикально. Фрагмент этого сечения представлен на рис.2. Снизу вверх через него движется вода, имеющая на входе ламинарный профиль. На стенках трубы заданы условия прилипания, выходное сечение свободно. Несмотря на свою относительную, кажущуюся простоту, такая модель дает возможности проверять расчетные методы и получать результаты, достаточно близкие к экспериментальным данным.



a *b*

Рис.6. *а*) фрагмент расчетного поля в осевом сечении (правая половина трубы; белый цвет –вихревые трубки, черный – несущая жидкость. *b*) Расчет по методу локальных флуктуаций вязкости. Относительная осевая скорость *y*=*w*/*wa* турбулентного течения в поперечном сечении трубы при наличии «вихревой засыпки» в зависимости от радиуса *r*, м. Кривые соответствуют Re=10^4, 10^5, 10^6, 10^7 – сверху вниз (в левой части рисунка).

Первым методом расчета этой модели был метод флуктуаций вязкости, представленный в работе [4]. Физическое воздействие турбулентной структуры на поток имитировалось ее большей вязкостью, менявшейся в зависимости от числа Re. Предварительно были проделаны численные эксперименты, в которых динамическое воздействие крутящегося шарового вихря сравнивалось с воздействием такого же шара другой, значительно большей вязкости. Было показано, что вращающийся объем жидкости (той же вязкости) почти «непрозрачен» для обтекающего его внешнего потока. То же имеет место и для не вращающегося, но значительно более вязкого объема. Было получено соответствие между скоростью вращения и эквивалентной ей (по динамическому воздействию на жидкость) вязкостью. Вязкость во всем расчетном поле была задана по методу локальных флуктуаций формулой $\mu = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\theta$, где μ_0 – вязкость несущей среды, μ_1 – вязкость вихревых колец, θ – характеристическая функция этих колец.

Результаты серии расчетов для различных чисел Рейнольдса, в совокупности покрывающих весь турбулентный диапазон, представлены на рис.6b. Они показывают, что данная модель вполне пригодна для получения профиля средних осевых скоростей турбулентных течений в трубах. Однако она не дает возможности получить детальную картину поля скоростей вблизи вихревых элементов, при подробном ее рассмотрении. Точнее, эта картина не будет соответствовать реальности, поскольку в реальности эти объемы вращаются и увлекают за собой прилегающие слои жидкости. Для получения реальной картины скоростей это вращение необходимо задать напрямую.

Именно такое, прямое задание окружных скоростей вращения вихревых трубок применено во втором методе реализации данной модели, методе встроенных решений. В этом методе система вихрей задана не как набор флуктуаций вязкости, а как система вихрей той же вязкости, но вращающихся в заданных направлениях с заданными окружными скоростями. Такая постановка задачи существенно ближе к реальности. Задавая возможные варианты распределения положений, размеров вихрей и их окружных скоростей, получаем не только поля скоростей, но и их распределение в конкретных зонах – в окрестностях вихрей, вихревых и дипольных трубок. Результаты расчета потока при $Re=4\cdot10^5$ представлены на рис.7.

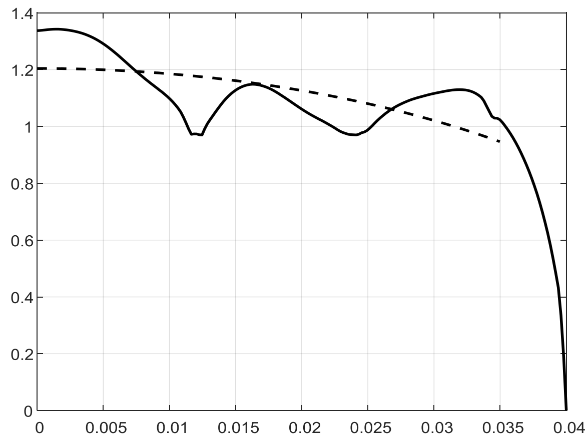


Рис.7. Расчет по методу встроенных решений. Относительная осевая скорость при $Re=4\cdot10^5$ - сплошная линия. Аппроксимация по формуле (13) – пунктирная линия. 6

Результаты расчета по первому методу (рис.6*b*) дают (что естественно) неравномерное поле скоростей, вызванное наличием внутренних структур. Результаты расчета того же потока по второму методу (рис.7) оказываются еще более неравномерными. Поскольку поле скоростей чрезвычайно немонотонно, его усреднение, получение средней осевой скорости является непростой задачей и требует принятия определенных принципов усреднения. Для решения этой задачи привлечем результаты работы [3], в которой было отмечено, что профиль средних осевых скоростей ядра турбулентного течения в трубах достаточно точно аппроксимируется выражением

$$y_a = y(0)\sqrt{1 - x^2 / 2}\,, \qquad (13)$$

где $y=v/v_{ср}$, $x=r/r_0$ – относительные скорость и радиус трубы, $v_{ср}$ – средняя скорость, r_0 – радиус. Это выражение является универсальным, т.к. оно не зависит от числа Re. Для нахождения числа y(0) – относительной скорости на оси потока – используем баланс расхода через площадь турбулентного ядра потока, ограниченную радиусом «особой точки» турбулентных профилей осевых скоростей. Особая точка – это экспериментально найденная на графиках $y=f(x)$ точка, где $y=1$ и $x=x_к\approx 0{,}75$ при всех значениях чисел Рейнольдса [13-15]. Используя баланс расхода Q_k

$$2\pi\int_0^{x_k} y(0)\sqrt{1-x^2/2}\,xdx = 2\pi\int_0^{x_k} y(x)xdx \equiv Q_k\ ,$$

и особую точку x_K, получаем

$$y(0)=0{,}612\ Q_k\ .$$

Вычислив значение $y(0)$, получаем усредненный профиль скорости, представленный пунктиром на рис.7. На этом рисунке дан профиль осевой скорости в том же сечении расчетной области, что и на рис.6, в сечении по центрам вихревых колец данного уровня. Нужно отметить, что представленный на нем результат является лишь примером анализа турбулентности в трубах, проверкой и подтверждением пригодности предлагаемой методики для такого анализа.

Стоит отметить, что выражение (13), предложенное нами в качестве аппроксимирующего для профиля средних осевых скоростей турбулентного течения, основано на виде уравнения для турбулентного течения в трубах

$$y'' + \frac{y'}{x} = G\left(1 - \frac{y^2}{y^2(0)(1-x^2/2)}\right) = G\left(1 - \left(\frac{y}{y_a}\right)^2\right)\ , \qquad (14)$$

предложенного в работе [3], а также проверено сравнением с кривыми, построенными по обобщающей эксперименты формуле Рейхардта [16]. Таким образом, y_a является некоторым масштабом скоростей для вычисления доли турбулентных потерь, которой является величина $(y/y_a)^2$ по сравнению с единицей. Не случайной является и величина $x^2/2$. В работе [13] отмечено, что замена переменной $t=x^2/2$ в уравнении ламинарного движения в цилиндрических трубах приводит к линейному профилю решения для ламинарного течения и упрощает вид уравнения (14), т.е. является органической для данной системы координат. Практически линейным оказывается и профиль турбулентных скоростей в пределах от оси до особой точки. Таким образом, аппроксимация (13) является теоретически и практически обоснованной.

Представленные результаты – метод расчета и метод обработки результатов – это два основных аспекта, необходимых для проведения работ по анализу влияния различных турбулентных структур на «итоговые» параметры турбулентных потоков.

Обсуждение

Рассмотрим преимущества и ограничения предлагаемой методики. Ее преимуществами являются:

a) программное задание «встроенных» областей, их геометрии и решений (поведения среды) в них, незаменимое в тех случаях, когда «ручное» их задание невозможно (например, для фрактальных структур),

b) одновременное получение картины решения во всех областях,

c) возможность применения к существующим программам без их изменения (к программам, в которых доступно «формульное» задание правых частей уравнений). То или иное задание правой части переделкой не является,

d) отсутствие необходимости задания граничных условий для встроенных областей – они получаются автоматически.

В приложении к гидродинамике метод дает возможность моделирования турбулентных потоков на основе моделей, очень близких к реальности, без введения каких-либо искусственных замен. Метод позволяет находить решения и обратных задач. Примером является задача, решенная Мураки [11], о движении вихревого диполя в стратифицированной жидкости над твердой поверхностью. Предлагаемым методом можно решить обратную задачу – по заданному движению вихревого диполя определить, как будет меняться картина касательных напряжений вокруг диполя (при том или ином градиенте температур).

Кроме нахождения самих полей, предлагаемый метод позволяет определить, какими физическими средствами (источниками или стоками в тепловых задачах, градиентами давления – в гидродинамических) можно поддерживать заданные распределения температур или скоростей. Величины и положение этих средств воздействия полностью определяются функциями, задающими правые части решаемых уравнений. Метод является точным. Результаты задания исходных данных ручным (когда это возможно) или программным образом совершенно идентичны. Поэтому идентичны и результаты расчетов по этим данным, что снимает вопрос о точности метода. Погрешности при моделировании могут определяться только степенью близости к реальности рассматриваемой модели, а также точностью счета.

Метод имеет и ограничения. Его невозможно применить к внутренним структурам (областям), формы которых настолько нерегулярны, что их нельзя запрограммировать, т.е. еще более сложным, чем фракталы. То же относится и к внутренним областям, условия на границах которых (вместе с их внутренним поведением) нельзя описать аналитическими выражениями. Для большей части задач эти ограничения несущественны.

Заключение

Предложенный метод позволяет задавать условия и решать достаточно сложные задачи математической физики, в которых расчетное поле включает области с известным поведением, отличающимся от неизвестного, искомого поведения основной среды. Метод применим и в тех случаях, когда задание условий – геометрии и решений во встроенных областях – невозможно иным образом, кроме программного. Он позволяет моделировать физические процессы с условиями, близкими к натурным. Это относится в первую очередь к моделированию турбулентности. На примере расчета турбулентного течения в трубе, а также на других примерах показано, что метод работоспособен и дает удовлетворительные результаты. Дальнейшее применение предлагаемого метода, а именно моделирование турбулентности с учетом каскадных фрактальных структур, составит предмет дальнейших разработок.

Литература

1. Rodriguez S. Applied Computational Fluid Dynamics and Turbulence Modeling. Springer AG; 2019.

2. Wilcox, D.C. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc; 2006.

3. Меламед Л.Э. Уравнение турбулентного движения в трубах // Письма в Журнал технической физики. 2015. Т. 41. № 24. С. 23-28. http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/42592.

4. Меламед Л.Э. Метод локальных флуктуаций и моделирование неоднородных сред // Письма в Журнал технической физики. 2016. Т. 42. № 19. С. 31–37. http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/43761.

5. Меламед Л.Э., Филиппов Г.А. Моделирование турбулентности как «вихревой засыпки» // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2017. Т.19. № 9-10. С. 122-132.

6. Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск. 2005. 358 с.

7. Baumert H.Z. Universal equations and constants of turbulent moution // Physica Scripta. 2013. V. 155. pp. 1-12.

8. Afanasyev Y.D., Korabel V.N. Starting vortex dipoles in a viscous fluid: Asymptotic theory, numerical simulations, and laboratory experiments // Physics of Fluids. 2004. V.16. №11. pp. 3850-3858.

9. Lacaze L., Brancher P., Eiff O., et al. Experimental characterization of the 3D dynamics of a laminar shallow vortex dipole // Experiments in Fluids. 2010. V. 48. № 2. pp. 225-231.

10. Sokolovskiy M. A., Cartonb X. J., Filyushkinc B. N., et al. Interaction between a surface jet and subsurface vortices in a three-layer quasi-geostrophic model // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2016. V.110. №3. pp.1-23.

11. Muraki D., Snyder Ch. Vortex Dipoles for Surface Quasigeostrophic Models // Journal of The Atmospheric Sciences. 2007. V. 64. pp. 2961-2967.

12. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.2. М. Физматгиз. 1963. 727с.

13. Меламед Л.Э., Филиппов Г.А. Обобщенная формула для скорости турбулентных и ламинарных течений в трубах // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2018. Т.20. № 7–8. С. 136-146.

14. Zagarola M.V., Smits A.J. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow // Journal of Fluid Mechanics. 1998. V. 373. pp. 33-79.

15. McKeon B J., Li J., Jiang W, et al. Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow // Journal of Fluid Mechanics. 2004. V. 501. pp. 135-147.

16. Reichardt H. Vollstandige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeit sverteilung in glatten Leitugen // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1951. Db. 31. N.7. pp. 208-219.

Автор публикации

Меламед Лев Эммануилович – канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник акционерного общества «Интеллект», г. Москва. E-mail: lev.melamed@yandex.ru.

References

1. Rodriguez S. Applied Computational Fluid Dynamics and Turbulence Modeling. *Springer AG*; 2019. doi 10.1007/978-3-030-28691-0.

2. Wilcox DC. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc; 2006.

3. Melamed LE. Uravnenie turbulentnogo dvizheniya v trubakh. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2015;41(24):23–28. http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/42592.

4. Melamed LE. Metod lokal'nykh fluktuatsii i modelirovanie neodnorodnykh sred. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2016;42(19):31-37. http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/43761.

5. Melamed LE, Filippov GA. Modelirovanie turbulentnosti kak «vikhrevoi zasypki». *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Problemy energetiki*. 2017;19(9-10):122-132.

6. Gol'dshtik MA. *Protsessy perenosa v zernistom sloe.* Institut teplofiziki im. S.S. Kutateladze SO RAN, Novosibirsk. 2005.

7. Baumert HZ. Universal equations and constants of turbulent moution. *Physica Scripta*. 2013;155. :1-12. doi:10.1088/0031-8949/2013/T155/014001.

8. Afanasyev YD, Korabel VN. Starting vortex dipoles in a viscous fluid: Asymptotic theory, numerical simulations, and laboratory experiments. *Physics of Fluids*. 2004;16(11):3850-3858. doi: 10.1063/1.1790493.

9. Lacaze L, Brancher P, Eiff O, et al. Experimental characterization of the 3D dynamics of a laminar shallow vortex dipole. *Experiments in Fluids*. 2010;48(2):225-231.

10. Sokolovskiy MA, Cartonb XJ, Filyushkinc BN, et al. Interaction between a surface jet and subsurface vortices in a three-layer quasi-geostrophic model. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics.* 2016;110(3):1-23. http://dx.doi.org/10.1080/03091929.2016.1164148.

11. Muraki D, Snyder Ch. Vortex Dipoles for Surface Quasigeostrophic Models. *Journal of The Atmospheric Sciences.* 2007;64:2961-2967. doi:10.1175/JAS3958.1.

12. Kochin NE, Kibel' IA, Roze NV. Teoreticheskaya gidromekhanika. Ch.2. M. Fizmatgiz. 1963.

13. Melamed LE, Filippov GA. Obobshchennaya formula dlya skorosti turbulentnykh i laminarnykh techenii v trubakh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Problemy energetiki*. 2018;20(7-8):136-146. doi:10.30724/1998-9903-2018-20-7-8-136-146.

14. Zagarola MV, Smits AJ. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics.* 1998;373:33-79.

15. McKeon B J, Li J, Jiang W, et al. Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 2004;501:135-147.

16. Reichardt H. Vollstandige Darstellung der turbulenten Geschwindigke its verteilung in glatten Leitugen. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1951;31(7):208-219.

Author of the publication

Lev E. Melamed – Joint-stock company "Intelligence", Moscow, Russia. E-mail: lev.melamed@yandex.ru.

Поступила в редакцию ***11 сентября 2020г.***