



ИССЛЕДОВАНИЕ ИСПАРЕНИЯ В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Р.П. Шпаковский

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева,
Дзержинский политехнический институт
г. Дзержинск, Нижегородская обл.,
rst-shp@list.ru

Резюме: *ЦЕЛЬ.* Рассмотреть стационарную диффузионную задачу при испарении чистой жидкости с плоской поверхности испарения в ламинарный пограничный слой вынужденного газового потока (в отсутствие заглабления поверхности испарения и волнообразования на ней) при числах. В классической модели диффузионной задачи поступления массы с плоской поверхности в ламинарный пограничный слой учитывается лишь возникающий при этом дополнительный подтормаживающий эффект. Однако получающееся решение не отвечает общему случаю испарения, поскольку при этом массоперенос может существенно зависеть от тепловой обстановки задачи, сопряжённой по фазам; в критериальной форме это обстоятельство выражается появлением дополнительного параметра. Отметим, что указанный параметр связан с величиной производной относительной концентрации по поперечной координате на поверхности испарения. В ходе предлагаемого решения температура поверхности испарения и соответственно величина этого параметра принимались постоянными. **МЕТОДЫ.** При решении задачи использовались численные приближённые методы интегрирования уравнения диффузии (метод Эйлера, метод интегро-дифференциального уравнения, а также метод последовательных приближений). При этом подтормаживающее действие потока пара с поверхности фазового перехода полагали для нашего случая сравнительно незначительным (что соответствовало экспериментальным данным, использовавшимся в [1-3]). **РЕЗУЛЬТАТЫ.** В статье анализируется известное классическое решение уравнения диффузии по модели Хартнетта - Эккерта и отмечается, что получаемый в этой модели результат не отвечает общему случаю испарения, когда массоотдача в газовой фазе зависит также от комплекса. На основе решения, полученного в нашей работе, приходим к выводу, что действие указанного параметра проявляется в увеличении толщины диффузионного пограничного слоя. Кроме того, этот эффект связан также со значением продольной координаты, являясь более заметным при её малых значениях. **ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Указанную картину испарения физически можно объяснить относительно большим количеством испаряемого вещества, нежели в "стандартном" случае поскольку представленные значения в свою очередь связаны с более высокими значениями температуры поверхности испарения. Можно также полагать, что в области газового потока, непосредственно примыкающей к поверхности испарения, указанные факторы проявляют себя схожим образом и в случае турбулентных течений.

Ключевые слова: *испарение, диффузия, пограничный слой, тепло-массоперенос.*

Для цитирования: Шпаковский Р.П. Исследование испарения в пограничный слой // Известия высших учебных заведений. ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ. 2020. Т.22. № 5. С.94-106. doi:10.30724/1998-9903-2020-22-5-94-106.

INVESTIGATION OF THE EVAPORATION IN THE BOUNDARY LAYER

RP. Shpakovskii

Nizhny Novgorod state technical University named after R. E. Alekseev,
Dzerzhinsk
Polytechnic Institute, Dzerzhinsk, Nizhny Novgorod region,
rst-shp@list.ru

Abstract: *THE PURPOSE.* Consider a stationary diffusion problem when a pure liquid evaporates from a flat surface of evaporation into a laminar boundary layer of a forced gas flow (in the absence of deepening of the evaporation surface and wave formation on it) at the number. In the classical model of the diffusion problem of the flow of mass from a flat surface into the laminar boundary layer, only the additional slowing down effect arising in this case is taken into account. However, the resulting solution does not correspond to the general case of evaporation, since in this case the mass transfer can significantly depend on the thermal conditions of the problem, conjugate in phases; in criterion form, this circumstance is expressed by the appearance of an additional parameter [1-3]. Note that this parameter is related to the value of the derivative of the relative concentration along the transverse coordinate on the evaporation surface. In the course of the proposed solution, the temperature of the evaporation surface and, accordingly, the value of this parameter were taken constant. *METHODS.* When solving the problem, we used approximate numerical methods for integrating the diffusion equation (Euler's method, integro-differential equation method, and also the method of successive approximations). In this case, the retarding effect of the vapor flow from the surface of the phase transition was assumed to be relatively insignificant in our case (which corresponded to the experimental data used in [1-3]). *RESULTS.* The article analyzes the well-known classical solution of the diffusion equation according to the Hartnett - Eckert model and notes that the result obtained in this case does not correspond to the general case of evaporation, when the mass transfer in the gas phase also depends on the complex. Based on the solution obtained in our work, we come to the conclusion that the effect of this parameter manifests itself in an increase in the thickness of the diffusion boundary layer. In addition, this effect is also associated with the value of the longitudinal coordinate, being more noticeable at its small values. *CONCLUSION.* The indicated evaporation pattern can be physically explained by a relatively larger amount of evaporated substance than in the "standard" case (since values, in turn, are associated with higher values of the evaporation surface temperature). It can also be assumed that in the region of the gas flow immediately adjacent to the evaporation surface, these factors manifest themselves in a similar way in the case of turbulent flows.

Key words: evaporation, diffusion, boundary layer, heat-mass transfer.

For citation: Shpakovskii RP. Investigation of the evaporation in the boundary layer. Power engineering: research, equipment, technology.2020;22(5):94-106. doi:10.30724/1998-9903-2020-22-5-94-106.

Введение и литературный обзор

В работах [1-3] на полуэмпирической основе показано, что в общем случае испарения критериальное уравнение массоотдачи в газовой фазе содержит комплексный критерий Dk/Le_f^n , где

$$Dk = \frac{(r + q_{ж}/j)}{T_f - T_w} \cdot \frac{c_{1w}^{-c} 1f}{c_{2w}} \left(\frac{Dp}{\lambda} \right)_f ; Le = Pr/Sc = Dp c_p / \lambda ; r - \text{удельная теплота}$$

испарения; $q_{ж}$ - плотность потока тепла от поверхности испарения в жидкую фазу; D -коэффициент взаимной диффузии; ρ -плотность; c - концентрация (мас. доля) компонента; T - температура; λ - коэффициент теплопроводности; c_p - удельная изобарная теплоёмкость газовой фазы; y - поперечная координата, отсчитываемая от поверхности

испарения и направленная в газовую фазу; $j = - \left(\frac{Dp}{c_2} \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_w$ - плотность потока массы

пара от поверхности испарения. Индексы: 1 – пар испаряющейся жидкости; 2 – второй («инертный») компонент парогазовой смеси; w – состояние газовой фазы на поверхности испарения; f – основной газовый поток.

Приводимые в [1-3] результаты основываются в том числе на обработке с использованием комплекса Dk/Le_f^n экспериментальных данных ряда авторов по пористому испарению различных жидкостей в газовый (воздушный) поток при подводе тепла к поверхности испарения от газовой фазы. Это данные Исаченко – Взорова (Московский энергетический институт) по испарению воды в щелевидный канал прямоугольного сечения, данные Фёдорова по испарению воды и Вайнберг по испарению этанола, ацетона и бензола (Институт тепло- и массообмена АН БССР) в аэродинамической трубе и наши данные по испарению воды, ацетона и этанола с поверхности плоского переходного элемента трубопровода (а также сублимации в тех же условиях нафталина и дифенила).

Эти данные в целом соответствуют турбулентным течениям, при отсутствии волнообразования на поверхности, а также отсутствию заглупления самой поверхности испарения.

Для всех указанных данных вне зависимости от гидродинамических и геометрических условий обтекания поверхности испарения было получено следующее соотношение, описывающее массоотдачу в газовой фазе:

$$Nu_{mc_{2w}} / (Nu_{mc_{2w}})_0 = (Dk / Le_f^n)^{-1}, \quad (1)$$

где комплексный параметр Dk/Le_f^n принимал значения от единицы до немногим более двадцати; число Нуссельта для массоотдачи $Nu_m = \frac{j l}{(D\rho)_f (c_{1w} - c_{1f})}$; l – характерный (определяющий) размер; показатель n в [1-3] принимался равным 0,4; индекс “0” отвечает “стандартным” условиям процесса, т.е. таким, при которых $Dk/Le_f^n = 1$ и соответственно будет иметь место подобие критериальных зависимостей тепло- и массоотдачи, имеющее в достаточно общем случае вид:

$$Nu_0 = A_0 Re^m Pr^n Gr^p \Psi, \quad (2)$$

$$(Nu_{mc_{2w}})_0 = A_0 Re^m Sc^n Gr^p \Psi; \quad (3)$$

при этом число Нуссельта для теплоотдачи $Nu = \frac{q l}{\lambda_f (T_f - T_w)}$; q – плотность потока

тепла от газовой фазы к поверхности испарения; Re , Pr , Sc , Gr – критерии соответственно Рейнольдса, Прандтля, Шмидта и Грасгофа; Ψ – фактор совместного тепломассопереноса, дополнительный к обычным числам подобия и одинаково влияющий на безразмерные функции Nu и $Nu_{mc_{2w}}$ (например, через параметр поперечного потока вещества

$b = \frac{j}{(\alpha/c_p)_{j \rightarrow 0}}$; при $\Psi = 1$ об уравнениях (2), (3) можно говорить соответственно как о

зависимости для чистой теплоотдачи и соответствующей ей аналогии массоотдачи);

α – коэффициент конвективной теплоотдачи от газового потока к обтекаемой поверхности.

Для уравнений (1)–(3) подразумевается, что вне зависимости от условий на поверхности испарения числа Nu , $Nu_{mc_{2w}}$ и $(Nu_{mc_{2w}})_0$ соответствуют одинаковым условиям в основном газовом потоке (эти условия приняты за определяющие); в критериальных формулах одинаковы значения показателей степени m , n , p для соответствующих определяющих чисел подобия.

Экспериментальные данные, лёгшие в основу соотношения (1), по поверхности испарения обрабатывались по средним для этой поверхности величинам. В качестве определяющего размера при этом использовался либо продольный размер всей плоской поверхности, либо – в наших опытах – диаметр подводящего трубопровода. Соотношение (1) в [1-3] соответствует значениям параметра $b \leq 0,1$.

Из соотношения (1) вытекает, что в совместном процессе тепло- массопереноса имеет место отступление от подобия процессов тепло- и массоотдачи в газовой фазе, характеризуемое величиной комплекса Dk/Le_f^n .

Что же касается собственно теплоотдачи, то при значении $\Psi = 1$ она оказывается соответствующей случаю «чистого» теплообмена (что практически отвечает значениям $b \leq 0,1$).

Физически указанные обстоятельства обусловлены тем, что задача испарения в целом является сопряжённой по фазам и её характер в общем случае определяется также тепловыми, гидродинамическими и геометрическими условиями в жидкой фазе [1-3]. В свою очередь последние оказывают непосредственное влияние на условия на фазовой границе, отвечающие за массоотдачу.

С учётом выражений для плотности потока массы пара от поверхности испарения/и диффузионного числа Нуссельта Nu_m и с введением относительной переменной $\tilde{c}_1 = (c_1 - c_{1w}) / (c_{1f} - c_{1w})$ выражение (1) можно представить через отношение производных:

$$\frac{(\partial \tilde{c}_1 / \partial y)_w}{(\partial \tilde{c}_1 / \partial y)_{w,0}} = (Dk / Le_f^n)^{-1} \frac{(D\rho)_{w,0}}{(D\rho)_w} = \zeta. \quad (4)$$

Далее будем полагать величину «стандартной» производной относительной концентрации $(\partial \tilde{c}_1 / \partial y)_{w,0}$ известной; она соответствует хорошо изученным данным. Тогда соотношение (4) при заданной величине параметра ζ вместе с условием $\tilde{c}_{1w} = 0$ можно рассматривать в качестве начальных (при $y=0$) условий задачи.

В дальнейшем рассмотрении, относящемся к продольному обтеканию ламинарным газовым потоком плоской поверхности испарения, будет предполагаться, что соотношение (4) действительно также в этом случае.

При $y \rightarrow \infty$ концентрация пара в газовом потоке равна c_{1f} , а относительная концентрация $\tilde{c}_{1f} = 1$; в модели пограничного слоя конечной толщины эти концентрации будут соответствовать внешней границе диффузионного пограничного слоя.

В [4] вопрос о характере профиля концентраций при ламинарном обтекании плоской поверхности испарения при числах $Dk / Le_f^n \geq 1$ решался нами с использованием методологии Кармана–Польгаузена: а именно, для диффузионного пограничного слоя конечной толщины подбирались полиномиальные распределения, удовлетворяющие граничным условиям. Принималось, что значение параметра поперечного потока вещества b не превышает значения 0,1; соответственно считалось, что влияние поступления массы с поверхности испарения на структуры пограничных слоёв несущественно. При этом также предполагалось, что отличия в размерах скоростного (динамического) и концентрационного (диффузионного) пограничных слоёв определяются лишь значениями числа Шмидта $Sc = \nu / D$ и при $Sc = 1$ толщины указанных слоёв являются одинаковыми (ν - кинематический коэффициент вязкости).

В методологии Кармана–Польгаузена, однако, отсутствует постановка вопроса о том, насколько полученное таким образом распределение соответствует самому дифференциальному уравнению, для которого ищется решение.

Сами авторы метода решали чисто гидродинамическую задачу обтекания пластинки вынужденным ламинарным потоком, и полученные ими результаты хорошо согласуются как с более точным решением Блазиуса, так и с последующими прямыми экспериментами [5,6]).

Настоящее исследование связано именно с решением дифференциального уравнения диффузии при указанных нами выше граничных условиях.

Проведённый анализ литературных источников показал, что в работах по испарению [7 - 15, и др.] этот вопрос не затрагивался.

Чтобы были лучше понятны особенности решения, возникающие при числах $Dk / Le_f^n > 1$, целесообразно предварительно остановиться также на подходе, известном как модель Хартнетта – Эккерта, тем более, что на указанную модель имеются ссылки во многих работах по испарению.

О классическом решении уравнения диффузии в модели Хартнетта - Эккерта

В классических моделях дифференциальное уравнение импульсов в пограничном слое при вынужденном ламинарном обтекании газовым потоком плоской поверхности имеет вид:

$$V_x \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial y^2}, \quad (5)$$

где V_x, V_y – компоненты (проекции) скорости; x – продольная координата; U – скорость на внешней границе динамического (скоростного) пограничного слоя; $\tilde{V}_x = V_x/U$ – безразмерная продольная скорость. Плотность газа ρ и его кинематический коэффициент вязкости ν принимают постоянными.

В модели Блазиуса (и следующих ей моделях асимптотического пограничного слоя, в том числе модели Хартнетта – Эккерта) для поперечной координаты используется в качестве масштабной величины комплекс $(\nu x/U)^{1/2}$. Значения \tilde{V}_x и безразмерного комплекса $\frac{V_y}{U} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}$, а также производные компонент скорости, являются при этом

функциями обобщённой координаты $\eta \equiv y \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}$, причём η не только

служит безразмерным представлением поперечной координаты y , но и соответствующим образом зависит от продольной координаты x :

$$\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \eta}. \quad (6)$$

При этом имеет место также вполне определённое соотношение между производными продольной скорости по размерным координатам:

$$x \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} = -\frac{1}{2} y \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial y}. \quad (7)$$

В монографии [16], где классическое решение уравнения (5) подробно анализируется с позиции теории подобия, отмечено, что, строго говоря, сам процесс в этом случае не является автомодельным, однако применённым способом преобразования переменных удаётся прийти “к системе уравнений [имеются в виду дифференциальные уравнения импульсов и непрерывности], которые связывают между собой только безразмерные переменные и не включают никаких параметров” (имеется в виду число Рейнольдса). Благодаря этому, также становится возможным и само получаемое решение представить в инвариантной (автомодельной) форме).

В модели Хартнетта – Эккерта [17] дифференциальное уравнение диффузии записывается аналогично уравнению (5):

$$V_x \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} + V_y \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \tilde{c}_1}{\partial y^2}, \quad (8)$$

при этом плотность парогазовой смеси ρ и коэффициент диффузии D также принимаются постоянными.

Аналогичным образом в решении используется и комплекс $(\nu x/U)^{1/2}$. Выражения для производных относительной концентрации оказываются при этом тоже аналогичными выражениям (6), (7).

Соответствующее представление используется также для дифференциального уравнения энергии.

Граничные условия для относительных величин продольной скорости, температуры и концентрации записываются в [17] также в симметричной форме (в том числе значения указанных безразмерных величин равны нулю на всей обтекаемой поверхности). Принималось также известное положение, что автомодельные решения имеют место только тогда, когда скорость поступления массы с поверхности $(V_y)_w$ пропорциональна $\sqrt{\frac{\nu U}{x}}$.

Решение Хартнетта – Эккерта зависит от скорости поступления массы с обтекаемой поверхности. При заданных условиях решения всех трёх дифференциальных уравнений (импульсов, энергии и диффузии) становятся в безразмерной форме аналогичными; в том числе производная $\left(\partial \tilde{c}_1 / \partial \eta \right)_w$ определена лишь безразмерной скоростью поступления массы со стенки.

Но дополнительно имеет место также вполне определенное соотношение между концентрацией в основном газовом потоке c_{1f} , на обтекаемой поверхности c_{1w} , безразмерной скоростью поступления массы с поверхности $\frac{(V_y)_w}{U} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}$ и производной $\left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \eta}\right)_w$. Это соотношение вытекает из выражения для плотности поперечного потока массы на обтекаемой “полупроницаемой” поверхности (закона Стефана). В целом это создаёт вполне определённую связь указанных выше величин, которую можно считать соответствующей случаю вдувания газов через пористую стенку в основной газовый поток.

Но приводимое в [17] решение уравнения диффузии не отвечает общему случаю испарения, когда массоотдача в газовой фазе зависит также от комплекса Dk/Le_f^n , отражающего сопряжённый по фазам характер задачи.

Методы

Решение диффузионной задачи испарения в ламинарный пограничный слой при числах $Dk/Le_f^n > 1$

Переходя к решению уравнения диффузии (8) при числах $Dk/Le_f^n > 1$ (“стандартный” случай $Dk/Le_f^n = 1$ является предельным), для модели с асимптотическими пограничными слоями положим, что комплекс $(\nu x/U)^{1/2}$ и в этом случае допустимо рассматривать в качестве масштаба для поперечной координаты y .

Уравнение диффузии запишем в форме [18]:

$$\frac{x \cdot V_x}{U} \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} + \frac{V_y}{U} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \eta} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 \tilde{c}_1}{\partial \eta^2}, \quad (9)$$

где η соответственно играет роль безразмерной поперечной координаты.

При решении уравнения (9) далее используем условие (4) на поверхности испарения, т.е. $(\partial \tilde{c}_1 / \partial y)_w = \zeta (\partial \tilde{c}_1 / \partial y)_{w,0}$; и соответственно $(\partial \tilde{c}_1 / \partial \eta)_w = \zeta (\partial \tilde{c}_1 / \partial \eta)_{w,0}$.

Принимаем, что параметр ζ - величина заданная и постоянная по обтекаемой поверхности. Значения безразмерных (относительных) величин продольной скорости, температуры, концентрации равны нулю на всей обтекаемой поверхности.

Далее рассматриваем интегрирование уравнения диффузии при значении параметра $b < 0,1$, т.е. в области относительно малых величин $(V_y)_w$.

Для интегрирования уравнения (9) при заданных условиях используем численный пошаговый метод Эйлера:

$$\left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \eta}\right)_{\eta+\Delta\eta} = \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \eta}\right)_{\eta} + Sc \left(x \tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} + \frac{V_y}{U} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}} \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \eta} \right)_{\eta} \Delta\eta,$$

начиная интегрирование от поверхности испарения (т.е. от координаты $\eta = 0$).

И также пошагово вычисляем значения \tilde{c}_1 .

В «стандартном» случае получаем известное решение. При $\zeta < 1$ возникает вопрос о поведении производной $\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x}$. Было принято, используя сформулированные выше краевые условия, осуществлять подбор зависимости этой производной от параметра ζ , чтобы обеспечивалось их выполнение.

Если при значении $\zeta = 1/2$ принять, что

$$x \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} = -\frac{1}{2} y \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} \zeta, \quad (10)$$

и соответственно,

$$x \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} = -\frac{\zeta}{2} \eta \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \eta} \quad (11)$$

(производные в этих выражениях отвечают фактическим значениям данной задачи), то, интегрируя соответственно сказанному выше, а также принимая (здесь и далее) $Sc=1$, получаем практически линейный профиль \tilde{c}_1 вплоть до значений $\eta = 3 \dots 3,5$. При $\eta = 6$

значение $\tilde{c}_1 = 0,94$, а величину $\eta = 6,3$ можно принять отвечающей толщине δ_c диффузионного пограничного слоя.

Поскольку значения $(V_y)_w$ сравнительно малы, то для величин \tilde{V}_x и $\frac{(V_y)_w}{U} \sqrt{\frac{Ux}{\nu}}$

в этом расчёте могут быть приняты значения, отвечающие классической задаче по модели Блазиуса. При этом также: $(\partial \tilde{c}_1 / \partial \eta)_{w,0} = (\partial \tilde{V}_x / \partial \eta)_{w,0} = (\partial \tilde{V}_x / \partial \eta)_w$.

Принимая, что в задаче Блазиуса толщина скоростного (и “стандартного” диффузионного при $Sc=1$) пограничных слоёв δ соответствует значению $\eta \cong 5$, получаем при $\zeta = 1/2$ отношение $\beta = \delta_c / \delta = 6,3/5 = 1,26$.

Если в соответствии с рассматриваемой методикой выражение (11) использовать при величинах ζ , меньших $1/2$, то значения $\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x}$ оказываются заниженными по модулю, что выражается, в частности, в несогласованном выполнении краевых условий на внешней границе диффузионного пограничного слоя. (В этом плане возможна коррекция выражения (11), если, например, вместо линейной зависимости от ζ ввести в (11) более сложную функцию.)

В то же время сама тенденция увеличения поперечного размера диффузионного пограничного слоя (а также увеличения размера его линейной части) по мере уменьшения ζ является вполне очевидной. Значения $\beta = \delta_c / \delta$ могут при этом определяться по приближённым формулам:

$$\beta \cong \zeta^{-1/3} \text{ при } 1 \geq \zeta \geq 1/2, \quad (12a)$$

$$\beta \cong 1,05 \left[\zeta (\delta_c / \delta_{усл})_0 \right]^{-1} = 0,63 \zeta^{-1} \text{ при } \zeta \leq 1/2, \quad (12b)$$

где $(\delta_c / \delta_{усл})_0$ представляет собой для “стандартных” условий и $Sc=1$ отношение толщины диффузионного пограничного слоя, равного примерно пяти в единицах η , к толщине в том же случае условного пограничного слоя, что соответствует $\eta \cong 3$; коэффициент 1,05 играет роль поправочного, учитывающего фактическое дополнительное увеличение размера диффузионного пограничного слоя.

Для уточнения вопроса были рассмотрены также другие методы, а именно непосредственно связанные с понятием пограничного слоя конечной толщины.

Предполагая, что профили относительной концентрации могут быть представлены в форме $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(\tilde{y}_c)$, где $\tilde{y}_c = y / \delta_c$, $\delta_c = \delta_c(x)$, имеем:

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \cdot \frac{\partial \tilde{y}_c}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \cdot \frac{1}{\delta_c},$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \cdot \frac{\partial \tilde{y}_c}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \cdot \frac{\partial \tilde{y}_c}{\partial \delta_c} \cdot \frac{d\delta_c}{dx} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \left(-\frac{y}{\delta_c^2} \right) \frac{d\delta_c}{dx}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} \left(-\frac{y}{\delta_c} \right) \frac{d\delta_c}{dx}. \quad (13)$$

При этом, если β зависит от продольной координаты, то тогда

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} \cdot \frac{y}{\beta \delta} \left(\beta \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{d\beta}{dx} \right) = -\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} y \left(\frac{d\delta}{\delta dx} + \frac{d\beta}{\beta dx} \right). \quad (14)$$

Запишем интегральное уравнение диффузионного пограничного слоя [18]:

$$d \left(\int_0^{\delta_c} V_x (c_1 - c_{1f}) dy \right) / dx + (V_y)_w (c_{1f} - c_{1w}) = -D (\partial c_1 / \partial y)_w.$$

С использованием относительных величин продольной скорости и концентраций, а также связи $j = (\rho V_y)_w$, это уравнение запишется в виде

$$U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} \tilde{V}_x (1 - \tilde{c}_1) dy = \frac{c_{2f}}{c_{2w}} D \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} \right)_w. \quad (15)$$

Для приближённого представления относительной концентрации \tilde{c}_1 используем метод Бернштейна. По этому методу приближающий многочлен n -ой степени для непрерывной функции на отрезке $[0, 1]$ выглядит как

$$B_n(\tilde{y}_c) = \sum_{m=0}^n \varphi(m/n) C_n^m \tilde{y}_c^m (1 - \tilde{y}_c)^{n-m},$$

где C_n^m - биномиальные коэффициенты; $\varphi(m/n)$ - значение данной функции в точке $\tilde{y}_c = m/n$.

Ограничимся многочленом третьей степени, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 \equiv B_3(\tilde{y}_c) &= \varphi(0) C_3^0 \tilde{y}_c^0 (1 - \tilde{y}_c)^3 + \varphi(1/3) C_3^1 \tilde{y}_c^1 (1 - \tilde{y}_c)^{(3-1)} + \\ &+ \varphi(2/3) C_3^2 \tilde{y}_c^2 (1 - \tilde{y}_c)^{(3-2)} + \varphi(1) C_3^3 \tilde{y}_c^3 (1 - \tilde{y}_c)^{(3-3)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используем краевые условия: $\varphi(0) \equiv \tilde{c}_1(0) = 0$, $\varphi(1) \equiv \tilde{c}_1(1) = 1$. В условии (4) необходимо перейти к поперечной координате, отнесённой к толщине диффузионного пограничного слоя в данном поперечном сечении:

$$\left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \right)_w \cdot \frac{1}{\delta_c} = \zeta \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \right)_{w,0} \frac{1}{\delta_{c,0}}; \quad \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \right)_w = \zeta \beta \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \right)_{w,0},$$

где $\delta_{c,0}$ - толщина диффузионного пограничного слоя в “стандартных” условиях; (равняется толщине динамического пограничного слоя: $\delta_{c,0} = \delta$, поскольку также принято, что число Шмидта равно единице).

Полагая, что при не очень больших значениях \tilde{y}_c профиль концентраций близок к линейному, а величина “стандартной” производной $(\partial \tilde{c}_1 / \partial \tilde{y}_c)_{w,0}$ соответствует “стандартному” распределению относительной концентрации по кубической параболе, принимаем $\varphi(1/3) C_3^1 = 1,5\zeta$.

В многочлене (16) необходимо определить ещё величину $\varphi(2/3) C_3^2$, для этого, с учётом сказанного здесь, выражая из (16) производную $\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c}$, имеем:

$$\text{при } \tilde{y}_c = 0 \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} \right)_w = 1,5\zeta\beta; \quad \text{при } \tilde{y}_c = 1 \quad \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial \tilde{y}_c} = -\varphi(2/3) C_3^2 + 3 = 0, \text{ откуда } \varphi(2/3) C_3^2 = 3.$$

В итоге можно представить

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= 1,5\zeta\beta\tilde{y}_c(1 - \tilde{y}_c)^2 + 3\tilde{y}_c^2(1 - \tilde{y}_c) + \tilde{y}_c^3 = \\ &= 1,5\zeta\beta\tilde{y}_c + 3\tilde{y}_c^2(1 - \zeta\beta) - 2\tilde{y}_c^3(1 - 0,75\zeta\beta). \end{aligned} \quad (17)$$

Если положить $\zeta = 1$ и, соответственно, $\beta = 1$ (“стандартный” случай при $Sc=1$), то из (17) получим известную приближённую зависимость относительной концентрации от относительной координаты \tilde{y}_c , отвечающую этому случаю.

Выражение (17) даёт некое совместное действие на распределение \tilde{c}_1 объединённого параметра $\zeta\beta$. Если связь ζ и β соответствует (12б), то в относительной форме $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(\tilde{y}_c)$ она становится для этого случая универсальной (причём, как наглядно видно из графического представления, несильно отличающейся от «стандартного» случая).

(Но при рассмотрении зависимости \tilde{c}_1 от размерной поперечной координаты надо учитывать, что при этом изменяется величина самогидродиффузионного пограничного слоя.)

Распределение относительных концентраций (17) далее подставлялось в интегро-дифференциальное уравнение (15). Для безразмерной (относительной) продольной скорости \tilde{V}_x при $\delta_c \leq \delta$ принималось распределение ($b \leq 0,1$):

$$\tilde{V}_x = 1,5\tilde{y} - 0,5\tilde{y}^3, \quad (18)$$

где $\tilde{y} = y/\delta$; и как более точно соответствующее ему представление для толщины скоростного пограничного слоя $\delta \cong 4,64 \sqrt{vx/U}$; также соответственно в ходе решения использовалось известное выражение:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{v}{U}.$$

При $\delta_c \geq \delta$ безразмерная скорость $\tilde{V}_x = 1$.

В рассматриваемом расчете также принималось $c_{2f}/c_{2w} \approx 1$.

(Замечание. Появление в правой части уравнения (15) симплекса c_{2f}/c_{2w} представляет собой соответствующую форму учёта в интегральном уравнении диффузии произведения $(V_y)_w(c_{1f} - c_{1w})$. Большие значения комплекса Dk/Le_f^n в экспериментах, о которых выше шла речь, отвечали испарению легколетучих жидкостей. При этом концентрация \tilde{c}_{1w} (испарение ацетона) достигала значения 0,5 (при $\tilde{c}_{1f} = 0$); соответственно отношение c_{2f}/c_{2w} равнялось двум. В тоже время, как уже отмечалось, значения $(V_y)_w$ по параметру b , учитывающему подтормаживающее действие поперечного потока вещества с поверхности, оставались сравнительно небольшими. При этом, очевидно, можно говорить также о большей относительной роли конвективного стефанова потока в процессе испарения. В более общем случае в теоретическом расчёте фактор c_{2f}/c_{2w} должен соответствующим образом учитываться (как и отклонение числа Шмидта от единицы).

При решении уравнения (15) в соответствии с изложенным методом получаем много член, в который β входит, в том числе, в отрицательных степенях. Значения β , отвечающие формулам (12), подставлялись в этот многочлен в качестве нулевого приближения. Дальнейшее решение получаемого уравнения показывает существование зависимости $\beta = \beta(x)$.

Так, принимая $\zeta = 1/2$ и полагая соответственно $\beta = 6,3/5 = 1,26$, имеем

$$d\beta/dx = -0,30/x; \quad \frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,24}{x}. \quad \text{Для } \zeta = 1/5 \text{ и, полагая } \beta \cong 3, \text{ получаем}$$

$$d\beta/dx \cong -1,31/x; \quad \frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,44}{x}. \quad \text{Для } \zeta = 1/10 \text{ и, полагая } \beta \cong 6, \text{ получаем}$$

$$d\beta/dx \cong -3,12/x; \quad \frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,52}{x}. \quad \text{Для } \zeta = 1/20 \text{ и, полагая } \beta \cong 12,$$

$$\text{получаем } d\beta/dx \cong -6,76/x; \quad \frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,56}{x}$$

Представляется очевидным, что вследствие испарения концентрация c_1 внутри слоя должна по потоку расти; тогда соответственно при значениях $0 < y < \delta_c$ производная $\partial c_1/\partial x > 0$, а $\partial \tilde{c}_1/\partial x < 0$.

Рассмотрим выражение (14). Поскольку δ представляет собой толщину динамического пограничного слоя (равную толщине диффузионного в "стандартных" условиях и при $Sc = 1$), то $\left(\frac{d\delta}{\delta dx}\right) = \frac{1}{2x}$ и величина $\frac{d\beta}{\beta dx}$, оставаясь отрицательной, не должна по модулю превысить $0,5x^{-1}$. Тогда и полученные выше при $\zeta < 1/5$ значения $\frac{d\beta}{\beta dx}$ должны быть скорректированы.

В этой связи вновь обратим внимание на выражение (10).

Положим в качестве нулевого приближения, что представление производной $\partial \tilde{c}_1/\partial x$ по (10) применимо для всех $\zeta \leq 1$, и сопоставим его "напрямую" с выражением этой производной по (14). Полагая в этих выражениях одними и теми же соответствующие величины производных и координат, получим, что $\frac{d\delta_c}{\delta_c} = \frac{\zeta}{2} \frac{dx}{x}$, и, интегрируя последнее, $\delta_c \sim Cx^{\zeta/2}$, где C зависит от ζ .

Если $\zeta=1$, то $\delta = C_{\zeta=1} \cdot x^{1/2}$; таким образом, $C_{\zeta=1}$ равняется примерно $5\sqrt{\nu/U}$, а наиболее естественным для толщины диффузионного пограничного слоя тогда представляется выражение

$$\delta_c \approx f(\zeta) \frac{5x}{\sqrt{Ux/\nu}} \left(\frac{x}{l_0}\right)^{\frac{\zeta-1}{2}} = f(\zeta) \frac{5x^{1/2}}{\sqrt{U/\nu}} \left(\frac{x}{l_0}\right)^{\frac{\zeta-1}{2}}, \quad (19)$$

где $f(\zeta) \equiv \zeta^{-1/3}$, если $1 \geq \zeta \geq 1/2$, и $f(\zeta) \equiv 0,63\zeta^{-1}$, если $\zeta \leq 1/2$;
 l_0 - характерный размер; $0 < x \leq l_0$.

Соответствующая формула для β с учётом зависимости от продольной координаты выглядит как

$$\beta \equiv f(\zeta) \left(\frac{x}{l_0}\right)^{\frac{\zeta-1}{2}}. \quad (20)$$

Соотношения (19), (20) требуют некоторого обсуждения.

Существует определённая проблема (в том числе теоретическая), связанная с необходимостью перехода от рассмотрения пластины (плоской поверхности) с конечной длиной (что соответствует фактическому положению дел) к упрощённой постановке задачи для полубесконечной плоскости. Не вдаваясь в подробности, отметим, что этот переход связан с определёнными условиями [16].

В случае $\zeta < 1$ формулы (19), (20) предполагают как бы обратный переход к поверхности с конечным продольным размером l_0 ; очевидно, что этот размер должен быть достаточно большим. (Можно предположить, что для малых ζ размер l_0 может приниматься как предельный, соответствующий переходу к турбулентному пограничному слою.)

В случае $\zeta \rightarrow 1$ ситуация (независимо от конкретного значения l_0) приближается к “стандартному” случаю, отвечающему классической задаче с полубесконечной плоскостью.

На основе (20) представим:

$$\frac{d\beta}{\beta dx} = \frac{\zeta-1}{2x}, \quad (21)$$

что при $\zeta = 1/2$ даёт $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,25}{x}$; при $\zeta = 1/5$ $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,40}{x}$;

при $\zeta = 1/10$ $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,45}{x}$; при $\zeta = 1/20$ $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,475}{x}$.

Эти результаты можно рассматривать как достаточно близкие к тем, что получены с помощью интегрального уравнения диффузии (15), но при этом выражение (21) чётко показывает: при $\zeta \rightarrow 0$ значение $\frac{d\beta}{\beta dx} \rightarrow -\frac{1}{2x}$.

В то же время необходимо заметить, что получаемые на основе классической теории и с её участием решения неприменимы в области, непосредственно примыкающей к входной кромке, т.е. в области достаточно малых значений продольной координаты.

Также в целом более сложен характер зависимости β от продольной координаты.

Например, для значений $\zeta = 1/2$, $x/l_0 = 0,01$ параметр β по формуле (20) равняется четырём. При этом значение комплексного параметра $\zeta\beta$ равняется двум, и это приемлемо для приближённого представления относительной концентрации по выражению (17), но указанные величины ζ и β не отвечают решению на основе интегрального уравнения диффузии.

Удовлетворительное согласование при $\zeta = 1/2$ имеет место для $x/l_0 \geq 0,1$. При $x/l_0 = 0,1$ согласно (20) $\beta = 2,2$, и через решение интегрального уравнения диффузии получаем: $d\beta/dx \equiv -1/x$, $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,45}{x}$, т.е. сама величина изменения β , как и следовало ожидать, связана также со значением продольной координаты.

Ещё один использовавшийся нами способ приближённого интегрирования уравнения диффузии (8) основан на методологиях Швеца и Тарга [6], разрабатывавшихся применительно к скоростному пограничному слою конечной величины.

Принимаем для уравнения диффузии (8) в качестве нулевого приближения, что $\delta^2 \tilde{c}_1 / \delta y^2 = 0$. Соответственно, используя условие (4), далее принято ($Sc=1$):

$$\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} = \frac{\zeta \beta \cdot 1,5}{\delta_c} = \frac{1,5 \zeta}{\delta} = \text{const.}$$

При дальнейшем интегрировании в уравнение диффузии подставлялись:

$\partial \tilde{c}_1 / \partial y$ согласно последнему выражению; $\partial \tilde{c}_1 / \partial x$ согласно (14); $\tilde{V}_x = 1,5 \tilde{y} - 0,5 \tilde{y}^3$, если $\delta_c \leq \delta$, и $\tilde{V}_x = 1$, если $\delta_c \geq \delta$. Согласно уравнению

непрерывности $V_y = (V_y)_w - \int_0^y \frac{\partial V_x}{\partial x} dy$, при этом значении $(V_y)_w$ в наших вычислениях ввиду его относительной малости снова пренебрегали.

После того, как было получено выражение для производной $\partial \tilde{c}_1 / \partial y$ в следующем приближении, интегрирование продолжали до получения выражения для относительной концентрации \tilde{c}_1 . Далее использовалось граничное условие: $\tilde{c}_1 = 1$ при $y = \delta_c$.

В результате получается многочлен, содержащий параметры ζ и β ; при этом показатель степени параметра β достигал положительной шестой степени. Подстановка в это выражение значений $\zeta = 1, \beta = 1$ не даёт полного согласования левой и правой частей получаемого уравнения: при правой части, равной единице, т.е. значению \tilde{c}_1 при $y = \delta_c$, левая часть приближённо равна 0,9.

Однако при $\zeta = 1/2$ и, принимая для β , как и раньше, нулевое приближение, равное 1,26, имеем хорошее соответствие с данными, получаемыми по выражению (21) и через решение интегрального уравнения диффузии: $d\beta/dx = -0,29/x$, $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,23}{x}$. То же при

$\zeta = 1/5$, где принималось нулевое приближение $\beta \cong 3$: $d\beta/dx = -1,14/x$, $\frac{d\beta}{\beta dx} = -\frac{0,38}{x}$.

При ещё меньших значениях ζ метод требует коррекции; возникающие здесь неточности в первую очередь, как представляется, связаны с появлением в результирующем приближающем многочлене больших чисел (из-за наличия высоких степеней β).

Заклучение и некоторые замечания, касающиеся испарения в турбулентный пограничный слой при числах $Dk/Le_f^n > 1$

Рассматриваемые в данной работе результаты связаны с фактическим поведением диффузионного пограничного слоя при числах $Dk/Le_f^n > 1$.

В то же время отметим, что если для ламинарного обтекания использовать отношение $\delta_{c,усл}/\delta_{0,усл}$, где $\delta_{c,усл}$ представляет собой толщину диффузионного условного пограничного слоя при значениях $\zeta < 1$, а $\delta_{0,усл}$ - такую же толщину при $\zeta = 1$, то вместо формул (12) получим: $\delta_{c,усл}/\delta_{0,усл} = \zeta^{-1}$.

Но то же самое следует из соотношения (1), которое, как отмечалось, непосредственно было получено с использованием экспериментальных данных по испарению в турбулентный пограничный слой.

Действительно,

$$Nu_{mc2w} = \frac{(D\rho)_w}{(D\rho)_f} \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} \right)_w \cdot l = \frac{(D\rho)_w}{(D\rho)_f} \frac{1}{\delta_{c,усл}},$$

соответственно

$$(Nu_{mc2w})_0 = \frac{(D\rho)_{w,0}}{(D\rho)_f} \left(\frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial y} \right)_{w,0} \cdot l = \frac{(D\rho)_{w,0}}{(D\rho)_f} \frac{1}{\delta_{0,усл}},$$

где $\delta_{с,усл}$, $\delta_{0,усл}$ также должны означать толщины диффузионного условного пограничного слоя, т.е. толщины, отвечающие чисто линейному изменению профиля концентраций, начинающемуся непосредственно от обтекаемой поверхности испарения.

Очевидно, что рассматриваемая в настоящей работе модель диффузионного пограничного слоя при ламинарном обтекании поверхности испарения и полученные ранее на полуэмпирической основе критериальные зависимости для турбулентных течений свидетельствуют об определённом единстве в характере влияния безразмерного комплекса Dk/Le_f^n на массоотдачу при испарении и в характере формирования соответствующих пограничных слоёв.

Комплексный параметр Dk/Le_f^n в экспериментах с испарительным охлаждением принимал значения, большие единицы, за счёт того, что температура поверхности испарения была выше той, что отвечает "стандартному" случаю (в свою очередь, это связано с уже упоминавшимся выше сопряжённым по фазам характером задачи).

При этом примерно по экспоненте возрастает парциальное давление пара и его концентрация на поверхности раздела фаз. В тоже время, если локальная интенсивность молекулярно-диффузионного переноса, характеризующуюся коэффициентом проводимости, заметно не меняется, то соответственно требуются большие расстояния для выравнивания концентраций пара до их значений в основном потоке, нежели в «стандартном» случае.

Литература

1. Шпаковский Р.П., Пастухова Г.В. Массотеплоотдача при испарении в газовый поток // Теоретические основы химических технологий. 1998. Т.32, №3. С. 256-263.
2. Шпаковский Р.П. Задача Стефана и тепломассоперенос при испарении // Известия ВУЗов. Проблемы энергетики. 2012. №9-10. С. 57-67.
3. Шпаковский Р.П. Тепломассоперенос при испарении в газовый поток: монография // Н.Новгород: НГТУ им. Р.Е.Алексеева, 2013. 256 с.
4. Шпаковский Р.П. Аппроксимация профиля концентрации в газовой фазе при испарении // Теор. основы хим. технол. 2002. Т.36, №2. С. 135-140.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. 742 с.
6. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во Ленинградского университета. 1970. 376 с.
7. Шишкова И.Н., Крюков А.П. Приближённое решение сопряжённой задачи тепло- и массопереноса через межфазную поверхность // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 2. С. 483-488.
8. Кузнецов Г.В., Феоктистов Д.В., Орлова Е.Г. Испарение капель жидкостей с поверхности анодированного алюминия // Теплофизика и аэромеханика. 2016. №1. С. 17–22.
9. Яманаев Г.А. Особенности выбора методики для расчёта испарения // Центральный научный вестник. 2018. Т.3. № 2. С. 47-48.
10. Елизаров Д.В., Елизаров В.В., Камалиев Т.С., и др. Математическое моделирование массопереноса при ламинарном движении капли в жидкой среде // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 2. С. 298-309.
11. Gu L.D., Min J.C., Tang Y.C. Effects of mass transfer on heat and mass transfer characteristics between water surface and airstream // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2018. V. 122. pp.1093-1102.
12. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. Effect of evaporating droplets on flow structure and heat transfer in axisymmetrical separated turbulent flow // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2019. V. 140. pp. 767-776.
13. Лаптев А.Г., Лаптева Е.А. Модель тепло- и массоотдачи в шероховатых и орошаемых каналах // Теплофизика и аэромеханика. 2015. № 4. С. 453-458.
14. Высокоморная О.В., Пискунов М.В., Стрижак П.А. Условия интенсивного испарения неоднородной капли воды в высокотемпературной газовой среде // Известия ВУЗов. Проблемы энергетики. 2015. № 5-6. С. 53-59.
15. Feng Chen, Chandra Sanjeev. Evaporation of ethanol films wicking on structured porous coatings deposited on copper plates // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2019. V. 136. pp. 821-831.
16. Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. М.: Высш. школа, 1974. 328 с.
17. Hartnett J.P., Eckert E.R.G. Mass-Transfer Cooling in a Laminar Boundary Layer with Constant Fluid Properties // Recent Advances in Heat and Mass Transfer, New York-Toronto-London, 1961. pp. 142-160.

18. Шпаковский Р.П., Якунин Ю.И. К решению уравнения диффузии пограничного слоя при нелинейном краевом условии Стефана // Матем. методы в технике и технол. ММТТ–17, Кострома, 2004. Т.1.С. 151-154.

Автор публикации

Шпаковский Ростислав Павлович – канд. техн. наук, доцент, кафедра Технология и оборудование химических и пищевых производств Дзержинского политехнического института НГТУ.

References

1. Shpakovskii RP, Pastukhova GV. Mass-heat transfer when evaporation into the gas stream. *Teor. Osnovy khimicheskikh technologii.* 1998;32(3):256-263.
2. Shpakovskii R. P. Stefan Problem and the heat-mass transfer by evaporation. *Izvestiyavuzov. Energy problem.* 2012;9-10:57-67.
3. Shpakovskii RP. Heat- mass transfer by evaporation into the gas stream: monograph. N. Novgorod: N. Novgorod State Technical University of R.E. Alekseev's name. 2013. 256 p.
4. Shpakovskii R. P. Approximation of the concentration profile in the gas phase during evaporation *Teor. osnovykhim.technol.* 2002;36(2):135-140.
5. Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1965.
6. Ginzburg, IP. Theory of resistance and heat transfer. Leningrad: Publishing house leningr. university press, 1970. 376 p.
7. Shishkova IN, Kryukov AP. Approximate solution of the conjugate problem of heat and mass transfer through the interface. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal.* 2016;89(2):483-488.
8. Kuznetsov GV, Feoktistov DV, Orlova EG. Evaporation of liquid droplets from the surface of anodized aluminum. *Thermophysics and aeromechanics.* 2016;1:17-22.
9. Yamanaev GA. Features of the choice of methodology for calculating evaporation. *Central Scientific Bulletin.* 2018;3(2):47-48.
10. Elizarov DV, Elizarov VV, Kamaliev TS, et al. Mathematical modeling of mass transfer in the laminar motion of a drop in a liquid medium. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal.* 2016;89(2):298-309.
11. Gu LD, Min JC, Tang YC. Effects of mass transfer on heat and mass transfer characteristics between water surface and airstream. *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* 2018;122:1093-1102.
12. Pakhomov MA, Terekhov VI. Effect of evaporating droplets on flow structure and heat transfer in axisymmetrical separated turbulent flow // *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* 2019;140:767-776.
13. Laptev AG, Lapteva EA. Model of heat and mass transfer in rough and irrigated canal. *Thermophysics and aeromechanics.* 2015;4:453-458.
14. Vysokomornaya OV, Piskunov MV, Strizhak PA. Conditions for intensive evaporation of a non-uniform water droplet in a high-temperature gas environment. *Izvestiya VUZov. Energy problems.* 2015;5-6:53-59.
15. Feng Chen, Chandra Sanjeev. Evaporation of ethanol films wicking on structured porous coatings deposited on copper plates. *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* 2019;136:821-831.
16. Gukhman AA. Application of similarity theory to the research of heat - mass transfer processes. – M.: VysshayaShkola, 1974. 328 p.
17. Hartnett JP, Eckert ER. G. *Mass-Transfer Cooling in a Laminar Boundary Layer with Constant Fluid Properties.* Recent Advances in Heat and Mass Transfer, Nev York-Toronto-London, 1961. P. 142-160.
18. Shpakovskii RP, Yakunin YI. To the solution of the diffusion equation boundary layer with nonlinear boundary condition of Stefan. *Mat. methods in engineering and technol. MMTT-17.* Kostroma, 2004;1:151-154.

Author of the publication

Rostislav P. Shpakovskii – Nizhny Novgorod state technical University named after R. E. Alekseev. Dzerzhinsk Polytechnic Institute, Dzerzhinsk, Nizhny Novgorod region. Email: rst-shp@list.ru

Поступила в редакцию

20 октября 2020г.