

К РАСЧЕТУ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Ю.В. ВИДИН, В.С. ЗЛОБИН, Д.И. ИВАНОВ

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Аналитические методы расчета теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоском канале связаны со сложной проблемой нахождения собственных функций и собственных значений. В статье предлагается сравнительно простое приближенно-аналитическое решение, позволяющее определять данные величины с высокой точностью, что значительно расширяет диапазон применения существующих методов и круг решаемых инженерных проблем, связанных с процессами расчета теплопереноса.

Ключевые слова: ламинарное течение, жидкость, плоский канал, теплообмен, задача Штурма-Лиувилля, собственные функции, собственные числа.

Исследованию процессов теплообмена при ламинарном течении жидкости в каналах посвящено значительное количество теоретических работ, например [1, 2]. Однако при использовании в инженерной практике существующих аналитических решений возникают серьезные математические трудности, связанные с нахождением собственных функций и собственных значений рассматриваемых задач.

В данной статье предлагается сравнительно несложный метод определения указанных величин. Проиллюстрируем рекомендуемый способ на примере движения жидкой среды в плоской трубе. Математическая постановка такой задачи при ряде упрощающих допущений [1, 2] может быть записана в следующем виде:

$$a \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = \frac{3}{2} w_0 \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial T(x, y)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \delta,$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha [T_c - T(x, \delta)], \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$T(0, y) = T_0. \quad (4)$$

Систему уравнений (1)–(4) целесообразно представить в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(X, Y)}{\partial Y^2} = (1 - Y^2) \frac{\partial \vartheta(X, Y)}{\partial X}, \quad (5)$$

$$0 \leq X < \infty, \quad 0 \leq Y \leq 1,$$

$$\frac{\partial \vartheta(X, 1)}{\partial Y} = -\text{Bi} \vartheta(X, 1), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vartheta(X, 1)}{\partial X} = 0, \quad (7)$$

$$\vartheta(0, Y) = 1, \quad (8)$$

где

$$\vartheta = \frac{T_c - T(x, y)}{T_c - T_0}; \quad 0 \leq Y = \frac{y}{\delta} \leq 1; \quad X = \frac{2x}{3Pe\delta};$$

$$Pe = \frac{W_0 \delta}{a}; \quad Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda_{ж}}.$$

Аналитическое решение задачи (5)–(8) приведено в монографии [2]. Оно имеет вид бесконечного ряда

$$\vartheta(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(Y) \exp(-\mu_n^2 X), \quad (9)$$

где табличные значения постоянных A_n и μ_n , а также функций $\psi_n(Y)$ для рассматриваемого плоского канала для некоторых конкретных величин чисел подобия Био (Bi) приведены в работе [2].

Задача о собственных значениях μ_n и собственных функциях $\psi_n(Y)$ или задача Штурма-Лиувилля заключается в нахождении решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\psi'' + \mu^2(1 - Y^2)\psi = 0 \quad (10)$$

со следующими краевыми условиями:

$$\psi' = -Bi \psi \quad \text{при } Y = 1, \quad (11)$$

$$\psi' = 0 \quad \text{при } Y = 0. \quad (12)$$

Представить интеграл дифференциального уравнения (10) через элементарные функции не удастся. Поэтому для его решения используется сложная специальная конфлюэнтная гипергеометрическая функция [2–4], определяемая как бесконечная сумма:

$$F_{\alpha}(\alpha, \gamma, \mu, Y^2) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \mu Y^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{\mu^2 Y^4}{2!} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{\mu^3 Y^6}{3!} + \dots, \quad (13)$$

где для канала плоского поперечного сечения $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{\mu}{4}$; $\gamma = \frac{1}{2}$. Тогда собственные функции $\psi_n(Y)$ рассчитываются на основе громоздкой зависимости

$$\psi(Y) = \exp\left(-\mu \frac{Y^2}{2}\right) \left[1 + \frac{(1-\mu)\mu}{2} Y^2 + \frac{(1-\mu)(5-\mu)}{12} \frac{\mu^2 Y^4}{2!} + \right.$$

$$+ \frac{(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu)}{120} \frac{\mu^3 Y^6}{3!} +$$

$$\left. + \frac{(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu) \dots (4m-3-\mu) \mu^m}{2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} \frac{Y^{2m}}{m!} + \dots \right], \quad (14)$$

где $m=1,2,3,\dots$

Производя подстановку формулы (14) в граничное условие (11), можно получить уравнение для нахождения характеристических чисел μ_n :

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ 1 - \left[(1-\mu) + \frac{(1-\mu)(5-\mu)\mu}{3 \cdot 2!} + \frac{(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu)\mu^2}{20 \cdot 3!} + \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2m(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu) \dots (4m-3-\mu)\mu^{m-1}}{2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)m!} + \dots \right] \times \right. \\ & \times \left[1 + \frac{(1-\mu)\mu}{2} + \frac{(1-\mu)(5-\mu)\mu^2}{12 \cdot 2!} + \frac{(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu)\mu^3}{120 \cdot 3!} + \dots \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(1-\mu)(5-\mu)(9-\mu) \dots (4m-3-\mu)\mu^m}{2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)m!} + \dots \right]^{-1} \right\} = \text{Bi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, очевидно, что определение собственных функций $\psi_n(Y)$ и собственных значений μ_n на основе зависимостей (14) и (15) является весьма трудоемким процессом. Исключением является единственный частный случай, а именно когда $\text{Bi}=1$, то тогда $\mu_1=1$ и, следовательно, решение (14) преобразуется в простое соотношение $\psi_1(Y) = \exp\left(-\frac{Y^2}{2}\right)$.

Поэтому в тех случаях, когда в выражении (9) достаточно ограничиться одним первым слагаемым бесконечной суммы, что возможно, если расчетная осевая координата канала X превышает некоторую величину $X^*(X \geq X^*)$, целесообразно применить для расчета $\psi_1(Y)$ и μ_1 приближенный аналитический метод. Суть его состоит в том, что на первом этапе за исходную функцию $\psi(Y)$ принимаем простейший тригонометрический косинус, т.е.

$$\psi(Y) = \cos(\mu Y). \quad (16)$$

Тогда дифференциальное уравнение (10) запишется в форме

$$\psi'' = -\mu^2(1-Y^2)\cos(\mu Y). \quad (17)$$

Осуществляя двойное интегрирование этого выражения с учетом условия (12), нетрудно получить аналитическое решение сравнительно простого вида:

$$\psi = \left(1 + \frac{6}{\mu^2} - Y^2\right) \cos \mu Y + \frac{4}{\mu} Y \sin \mu Y - \frac{6}{\mu^2}. \quad (18)$$

При этом было принято во внимание, что собственные функции $\psi(Y)$ для оси канала $Y=0$ должны равняться единице, т.е. $\psi(0)=1$. Используя (18), можно получить выражение для $\psi_1(1)$:

$$\psi_1(1) = \frac{4}{\mu_1} \sin \mu_1 - \frac{6}{\mu_1^2} (1 - \cos \mu_1).$$

Далее, подставляя зависимость (18) в граничное условие (11), легко получить уравнение для расчета первого собственного значения μ_1 , а именно:

$$(2Bi-1)\mu \sin \mu + (3Bi + \mu^2) \cos \mu = 3Bi. \quad (19)$$

Это соотношение позволяет определять μ_1 с высокой точностью во всем диапазоне изменения числа Био: $0 \leq Bi < \infty$. Целесообразно тригонометрическое уравнение (19) привести к алгебраическому виду, что существенно упростит процедуру расчета корня μ_1 . Для этого нужно представить тригонометрические функции $\sin \mu$ и $\cos \mu$ в форме усеченных степенных рядов [5]:

$$\sin \mu = \mu - \frac{\mu^3}{6} + \frac{\mu^5}{120} - \frac{\mu^7}{5040}, \quad (20)$$

$$\cos \mu = 1 - \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^4}{24} - \frac{\mu^6}{720}, \quad (21)$$

которые хорошо аппроксимируют $\sin \mu$ и $\cos \mu$ при значениях $0 \leq \mu < 2$.

С помощью условий (20) и (21) удастся формулу (19) преобразовать из тригонометрической зависимости в алгебраическую:

$$\mu^4 - \frac{10(5Bi+8)}{3Bi+8}\mu^2 + \frac{120Bi}{3Bi+8} - \frac{10(Bi+3)}{105(3Bi+8)}\mu^6 = 0, \quad (22)$$

которая с помощью подстановки

$$\beta = \mu^2 \quad (23)$$

сводится к кубическому (3-й степени) уравнению. Для его решения может быть использован один из известных аналитических методов, например метод Кардана [5]. Однако учитывая, что последнее слагаемое в левой части выражения (22) существенно меньше по абсолютной величине других его членов, можно в первом приближении им пренебречь. При таком допущении уравнение (22) вырождается в биквадратное и, следовательно, искомый корень μ_1 легко может быть вычислен по элементарной формуле

$$\mu_1^2 = \frac{5(5Bi+8)}{3Bi+8} - \sqrt{\frac{25(5Bi+8)^2}{(3Bi+8)^2} - \frac{120Bi}{3Bi+8}}. \quad (24)$$

Далее можно внести некоторое незначительное уточнение в полученный таким образом результат, если вместо выражения (24) использовать решение

$$\mu_1^2 = \frac{5(5Bi+8)}{3Bi+8} - \sqrt{\frac{25(5Bi+8)^2}{(3Bi+8)^2} - \frac{120Bi}{3Bi+8}} + M, \quad (25)$$

где M является дополнительным поправочным слагаемым, величина которого равна

$$M = \frac{10(Bi+3)}{105(3Bi+8)}\mu_1^6. \quad (26)$$

Сюда входит значение μ_1 , рассчитанное ранее на основе (24). В табл. 1 приведены данные расчетов по формуле (25) для некоторых значений числа Био. Здесь же для сравнения указаны величины μ_1 , найденные численным методом по строгой, но более сложной формуле (15) авторами работы [2].

Сопоставление этих результатов свидетельствует, во-первых, что максимальная относительная погрешность определения корня μ_1 по выражению (25) для всего возможного диапазона чисел Био ($0 \leq Bi < \infty$) менее 0,5%. Во-вторых, приближенные значения μ_1 оказываются несколько больше действительных.

Весьма важной математической особенностью предлагаемого решения (18) является то, что оно позволяет существенно легче и быстрее определить первую собственную функцию $\psi_1(Y)$ при любом варианте сочетания параметра Bi и поперечной координаты канала Y , чем в случае применения для той же цели зависимости (14). В табл. 2 представлены результаты определения на основе выражения (18) величины первой собственной функции $\psi_1(Y)$ для ряда чисел Bi и фиксированных координат Y (0,2; 0,4; 0,6; 0,8 и 1,0). В эту же таблицу включены данные, заимствованные из монографии [2]. Анализ приведенных в таблице значений свидетельствует, что формула (18) обладает вполне достаточной точностью для выполнения по ней инженерных расчетов. Таким образом, полученные несложные аналитические выражения (18) и (22) позволяют проводить вычисление первого собственного числа μ_1 и первой собственной функции $\psi_1(Y)$ с высокой точностью.

Таблица 1

Сравнение результатов расчетов корня μ_1 по формуле (25)
с данными, приведенными в монографии [2]

Bi	μ_1 по формуле (25)	μ_1 по данным [2]
0	0	0
0,5	0,7770	0,7755
1,0	1,0028	1,0000
2,0	1,2243	1,2202
5,0	1,4506	1,4463
10,0	1,5559	1,5524
50,0	1,6562	1,6544
100,0	1,6699	1,6684
∞	1,6833	1,6816

Таблица 2

Значения первой собственной функции $\psi_1(Y)$ для плоского канала

$Y \backslash Bi$	0,2		0,4		0,6	
	по ф-ле (18)	по данным [2]	по ф-ле (18)	по данным [2]	по ф-ле (18)	по данным [2]
0	1	1	1	1	1	1
0,5	0,9881	0,9881	0,9534	0,9535	0,8995	0,8999
1,0	0,9802	0,9802	0,9227	0,9231	0,8345	0,8353
2,0	0,9706	0,9706	0,8855	0,8862	0,7566	0,7580
5,0	0,9587	0,9587	0,8405	0,8414	0,6639	0,6657
10,0	0,9525	0,9525	0,8173	0,8181	0,6168	0,6183
50,0	0,9461	0,9461	0,7938	0,7942	0,5696	0,5705

продолжение табл. 2

$Y \backslash Bi$	0,8		1,0	
	по ф-ле (18)	по данным [2]	по ф-ле (18)	по данным [2]
0	1	1	1	1
0,5	0,8320	0,8324	0,7574	0,7574
1,0	0,7258	0,7261	0,6076	0,6065
2,0	0,5992	0,6009	0,4295	0,4288
5,0	0,4525	0,4544	0,2281	0,2256
10,0	0,3791	0,3806	0,1281	0,1249
50,0	0,3066	0,3072	0,0324	0,0260

Следует подчеркнуть, что для исследования температурного поля в плоском ламинарном потоке жидкости на регулярном участке канала, т.е. когда $X \geq 0,3$, в решении (9) достаточно учитывать именно только первое слагаемое бесконечной суммы (9).

В заключение необходимо отметить, что если продолжить рекомендованный подход и на втором этапе изложенной методики использовать вместо первоначальной аппроксимации (16) решение в виде формулы (18), то могут быть получены сравнительно простые расчетные зависимости, обладающие еще более высокой степенью точности.

Подводя итоги, можно сказать, что основным результатом статьи является приближенный аналитический метод расчета первых собственных функций и собственных значений в задаче теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоском канале, основанный на использовании в качестве исходного решения элементарной функции. Это позволило получить более простые и достаточно точные конечные зависимости для определения искомых величин по сравнению с существующими строгими математическими решениями.

Литература

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: "Энергия", 1967. 412 с.
2. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов В.В., Медведев Г.Г. Инженерные методы расчета задач нелинейного теплообмена при ламинарном течении жидкости в каналах. Красноярск: СФУ, 2015. 155 с.
3. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1977. 343 с.
4. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. Бронштейн П.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1965. 608 с.

Поступила в редакцию

31 января 2016 г.

Видин Юрий Владимирович – канд. техн. наук, профессор кафедры «Тепловые электрические станции» Политехнического института Сибирского федерального университета (ПИ СФУ).
Тел: 8(391)249-74-13. E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

Злобин Виктор Семенович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Тепловые электрические станции» Политехнического института Сибирского федерального университета (ПИ СФУ).
Тел: 8(913)519-40-71. E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

Иванов Дмитрий Иванович – старший преподаватель кафедры «Тепловые электрические станции» Политехнического института Сибирского федерального университета (ПИ СФУ).
Тел: 8(391)249-74-13. E-mail: zlobinsfu@mail.ru.