

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

УДК 536.2 (075)

DOI:10.30724/1998-9903-2023-25-4-71-82

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Котова Е.В.¹, Клеблеев Р.М.¹, Кудинов В.А.¹

¹Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Россия
totig@yandex.ru

Резюме: АКТУАЛЬНОСТЬ. Ввиду трудностей нахождения собственных чисел и собственных функций для тел с осевой (цилиндр) и центральной (шар) симметрией, определяемых в классических методах из краевых задач Штурма – Лиувилля, включающих уравнения Бесселя, точные аналитические решения которых не получены (известны лишь численные решения, описываемые приближенными аппроксимационными формулами), возникает необходимость разработки аналитических методов их решения. В связи с чем, была поставлена ЦЕЛЬ - разработать метод определения собственных функций и собственных чисел, связанный с выполнением дифференциального уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля в центре симметрии, применительно к телам с осевой симметрией. МЕТОДЫ. В основу метода положено использование дополнительных граничных условий (ДГУ) и ортогональных систем координатных функций в интегральном методе теплового баланса. Система собственных функций, определяемая из решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, принимается в виде тригонометрического ряда, неизвестные константы которого находятся из ДГУ. ДГУ определяются так, чтобы в центре симметрии выполнялось исходное дифференциальное уравнение нестационарной задачи теплопроводности. РЕЗУЛЬТАТЫ. Показана высокая точность нахождения собственных чисел, получаемых из решения уравнения Бесселя краевой задачи Штурма – Лиувилля. Точность собственных чисел определяется числом используемых ДГУ. ВЫВОДЫ. Полученное окончательное решение исходной задачи нестационарной теплопроводности для цилиндра включает лишь простые алгебраические выражения, исключая специальные функции (Бесселя, Неймана, Ханкеля), которые имеют место в классических решениях.

Ключевые слова: задача теплопроводности; цилиндр; метод разделения переменных; краевая задача Штурма – Лиувилля; тригонометрические координатные функции; дополнительные граничные условия; собственные функции; собственные числа; интегральный метод теплового баланса.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Для цитирования: Котова Е.В., Клеблеев Р.М., Кудинов В.А. Об одном методе определения собственных чисел в задачах теплопроводности для цилиндра // Известия высших учебных заведений. ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ. 2023. Т.25. № 4. С. 71-82. doi:10.30724/1998-9903-2023-25-4-71-82.

METHOD FOR DETERMINING EIGEN NUMBERS IN HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR A CYLINDER

E.V. Kotova¹, R.M. Klebleev¹, V.A. Kudinov¹

¹Samara State Technical University, Samara, Russia
totig@yandex.ru

Abstract: *RELEVANCE.* Due to the difficulties of finding eigenvalues and proper functions for bodies with axial (cylinder) and central (ball) symmetries defined in classical methods from the edge Sturm-Liouville problems, including Bessel equations whose exact analytical solutions are not obtained (known only numerical solutions, described by approximation formulas), there is a need to develop analytical methods of their solution. *THE PURPOSE.* Using orthogonal methods of weighted residuals, an approximate analytical method for determining eigenfunctions and eigenvalues in boundary value problems with axial and central symmetry (cylinder, ball) has been developed. *METHODS.* The method is based on the use of orthogonal systems of coordinate functions and additional boundary conditions. Latter are in such a form that their fulfillment by the desired solution is equivalent to the fulfillment of the differential equation of the boundary value problem at the boundary points of the region, leading to its fulfillment inside the considered region. Moreover, the accuracy of the equation depends on the number of approximations, which, in turn, depends on the number of additional boundary conditions used. Using the orthogonality property of trigonometric coordinate functions included in a series representing eigenfunctions makes it possible to increase the accuracy of the fulfillment of the differential equation of the Sturm-Liouville boundary value problem and the accuracy of determining the eigenvalues. To satisfy the initial condition, its residual is compiled and the condition of its orthogonality to all coordinate functions is required. The orthogonality of trigonometric systems of coordinate functions with respect to the unknown constants of integration leads to a system of algebraic linear equations, the number of which is equal to the number of approximations. As a result, the fulfillment of the initial condition is simplified and the accuracy of its fulfillment is increased. *RESULTS.* The advantage of the method is that the resulting solution contains only simple algebraic expressions, excluding special functions (Bessel function, Legendre function, gamma function). *CONCLUSION.* Thus, bypassing direct integration over a spatial variable, the use of additional boundary conditions makes it possible to find a solution of any complexity of the equations of the Sturm-Liouville boundary value problem, which reduces to the definition of simple integrals.

Keywords: heat conduction problem; cylinder; method of separation of variables; Sturm-Liouville boundary value problem; trigonometric coordinate functions; additional boundary conditions; eigenfunctions; eigen numbers.

Acknowledgments: The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2023-0003) as part of the state task of the Samara State Technical University.

For citation: Kotova E.V, Klebleev R.M, Kudinov V.A. Method for determining eigen numbers in heat conduction problems for a cylinder *Power engineering: research, equipment, technology.* 2023;25(4):71-82. doi:10.30724/1998-9903-2023-25-4-71-82.

Введение (Introduction)

Классические аналитические методы и методы интегральных преобразований в задачах теплопроводности для тел с центральной и осевой симметрией приводят к бесконечным рядам с функциями Бесселя. Их неудобство в том, что решения имеют вид тройного ряда, собственные числа которого не могут быть представлены точной общей формулой [1-8]. Как следует из указанных работ, собственные функции, получаемые из решения краевых задач Штурма – Лиувилля для тел с центральной осевой симметрией, включают функции Бесселя, представляют бесконечные ряды. Следовательно, каждое частное решение, представляющее одну собственную функцию, содержащее лишь одно

собственное число, представляет бесконечный ряд. Составление суммы частных решений, необходимой для выполнения начального условия краевой задачи, приводит к решению в виде двойного ряда с неизменными константами интегрирования. Это решение удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям задачи, но не удовлетворяет начальному условию. После определения из этого условия констант интегрирования получаемое окончательное решение принимает уже вид тройного ряда, один из которых содержится в знаменателе формулы, определяющей константы интегрирования [1, 3, 4]. Следует также отметить, что собственные функции, каждая из которых представлена в виде ряда, обладают свойством ортогональности с весом [4], что существенно усложняет выполнение начального условия, связанного с составлением его невязки и выполнением требования ее ортогональности ко всем собственным функциям. Представление решения краевой задачи Штурма – Лиувилля в виде ряда из тригонометрических функций позволяет существенно упростить выполнение начального условия и окончательный вид получаемого решения ввиду того, что свойством ортогональности обладают как собственные функции, составленные из тригонометрического ряда, так и непосредственно тригонометрические функции. В связи с чем, при выполнении начального условия достаточно потребовать выполнения ортогональности его невязки ко всем тригонометрическим (а не собственным) функциям. Классические аналитические методы для задач с центральной и осевой симметрией оказываются малоэффективными особенно в случаях, когда требуется получать решение для малых и сверхмалых значений времени. Поэтому возникает необходимость в разработке эффективных приближенных методов, к которым относятся методы Л.В. Канторовича, Галеркина, интегральный метод теплового баланса [9-23]. Они более универсальны, по сравнению с точными. Однако, при их применении возникают проблемы недостаточной точности получаемых решений. Причина связана с плохой обусловленностью матриц систем алгебраических уравнений. Например, метод Канторовича приводит к системам обыкновенных уравнений, которые сводятся к степенным алгебраическим уравнениям. Получаемые из их решения собственные числа не описываются общей формулой. Классические методы, используемые совместно с приближенными, приводят к решениям, исключаяющим функции Бесселя. Однако, при большом числе приближений, решение оказывается плохо сходящимся ввиду низкой точности определения собственных чисел, определяемых из решения степенных алгебраических уравнений [7, 8].

Цель исследования заключается в получении решения краевой задачи Штурма – Лиувилля для тел с центральной и осевой симметрией на основе использования ортогональных систем тригонометрических координатных функций и дополнительных граничных условий [10-15, 17, 18].

Научная значимость данной работы в том, что получаемое решение не включает специальные функции (Бесселя, Неймана, Ханкеля), содержащиеся в классических аналитических решениях, что имеет существенное практическое значение, ввиду неудобства использования специальных функций, которые не описываются точными аналитическими формулами. Их использование, даже при наличии современных вычислительных средств, затруднительно и особенно, в случае, когда требуется применение большого числа приближений, что необходимо при получении решений для малых и сверхмалых значений времени. Использование тригонометрических координатных функций позволяет снять данные ограничения, а также упростить процесс получения аналитического решения.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что такой подход позволяет выполнить исходное дифференциальное уравнение в центре симметрии, минуя его непосредственное интегрирование по пространственной переменной, ограничиваясь лишь выполнением осредненного уравнения краевой задачи Штурма – Лиувилля.

Материалы и методы (Materials and Methods)

Используемый обычно интегральный метод решения краевой задачи Штурма – Лиувилля, характеризуясь универсальностью, имеет низкую точность, что связано с трудностью увеличения числа приближений, вследствие отсутствия условий для определения коэффициентов решения. В работах [10-17] с целью повышения точности

используются ДГУ. Следует отметить, что их применение не изменяет математическую постановку задачи и является лишь средством для упрощения получения решения. ДГУ позволяют выполнить уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри области [9, 10]. Ниже будет рассмотрена методика определения собственных чисел, позволяющая в достаточно простом виде получать решения в форме бесконечного ряда, содержащего только алгебраические выражения. Главной особенностью метода является использование ДГУ, что приводит к высокой точности собственных чисел.

Результаты (Results)

Найдем решение следующей задачи

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right); \quad (1)$$

$$(\tau > 0; 0 < r < R);$$

$$T(r, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (3)$$

$$T(R, \tau) = T_{\text{ст}}, \quad (4)$$

$$T(0, \tau) \neq \infty. \quad (5)$$

где T , r , τ – температура, координата, время; a – температуропроводность; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; R – радиус цилиндра.

Условие (5) означает, что температура в центре цилиндра в течение всего времени процесса теплообмена должна быть конечной и находиться в пределах $T_0 < T < T_{\text{ст}}$, принимая в начальный момент времени ($\tau = 0$) значение $T = T_0$ и приближаясь к величине $T \rightarrow T_{\text{ст}}$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Обозначим: $\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}$ – безразмерная температура; $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ – число

Фурье; $\rho = \frac{r}{R}$ – безразмерная радиальная координата.

Задача (1) – (5) принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}; \quad (6)$$

$$(Fo > 0; 0 \leq \Theta \leq 1; 0 < \rho < 1);$$

$$\Theta(\rho, 0) = 1; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \rho} = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0; \quad (9)$$

$$\Theta(0, Fo) /_{Fo \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Примем решение задачи в виде

$$\Theta(\rho, Fo) = \phi(Fo)\Psi(\rho), \quad (11)$$

где $\phi(Fo)$; $\Psi(\rho)$ – неизвестные функции.

Подставив (11) в (6), имеем

$$\frac{d\phi(Fo)}{dFo} + \mu\phi(Fo) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{d^2\Psi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} + \mu\Psi(\rho) = 0, \quad (13)$$

где μ – константа.

Интеграл уравнения (12) будет

$$\phi(F_0) = A \exp(-\mu F_0) , \quad (14)$$

где A – постоянная.

Граничные условия для уравнения (13) имеют вид

$$d\Psi(0)/d\rho = 0 ; \quad (15)$$

$$\Psi(1) = 0 . \quad (16)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (13), (15), (16) будем искать в виде

$$\Psi(\rho) = \sum_{k=1}^n a_k N_k(\rho) , \quad (17)$$

где a_k – постоянные, $N_k(\rho) = \cos(z\rho/2)$, ($z = 2k-1$; $k = \overline{1, n}$) – координатные функции.

Постоянные a_k находятся из ДГУ, выполнение которых в точке $\rho = 0$ (центр симметрии) эквивалентно выполнению в этой точке уравнения (13). Как показывают расчеты, увеличение числа приближений (числа n членов ряда) приводит к увеличению точности определения собственных чисел μ_i . Преимущество данного метода состоит в возможности получения решений для любых дифференциальных уравнений краевой задачи Штурма – Лиувилля (пластина, цилиндр, шар и проч.). Найденные таким путем решения не включают специальные функции и состоят лишь из тригонометрических координатных функций.

Очевидно, что соотношение (17) удовлетворяет условиям (15), (16). Для нахождения неизвестных a_k , ($k = \overline{1, n}$) используются ДГУ. Например, при трех членах ряда (17) следует определить три ДГУ. Первое из них согласно (15) будет

$$\Psi(0) = 1 . \quad (18)$$

Для определения следующих ДГУ запишем дифференциальное уравнение (13) применительно к точке $\rho = 0$

$$\frac{d^2\Psi(0)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Psi(0)}{d\rho} + \mu\Psi(0) = 0 . \quad (19)$$

Раскрывая неопределённость во втором слагаемом (19), с учётом (18) получаем ДГУ вида

$$\frac{d^2\Psi(0)}{d\rho^2} = -\frac{\mu}{2} . \quad (20)$$

Дифференцируя (13), получаем

$$\frac{d^3\Psi(\rho)}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2\Psi(\rho)}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} + \mu \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} = 0 . \quad (21)$$

Соотношение (21) для точки $\rho = 0$ в результате раскрытия неопределённостей приводится к следующему ДГУ

$$\frac{d^3\Psi(0)}{d\rho^3} = 0 . \quad (22)$$

Очевидно, что соотношение (17) удовлетворяет ДГУ (22).

Для получения следующего ДГУ продифференцируем уравнение (13) дважды по ρ

$$\frac{d^4\Psi(\rho)}{d\rho^4} + \frac{1}{\rho} \frac{d^3\Psi(\rho)}{d\rho^3} - \left(\frac{2}{\rho^2} - \mu \right) \frac{d^2\Psi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho^3} \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} = 0 . \quad (23)$$

Соотношение (23) применительно к точке $\rho = 0$ содержит неопределённости, после раскрытия которых, учитывая (22), оно принимает вид

$$\frac{4}{3} \frac{d^4\Psi(0)}{d\rho^4} + \mu \frac{d^2\Psi(0)}{d\rho^2} = 0 . \quad (24)$$

Соотношение (24) с учётом (20) приводится к следующему ДГУ

$$\frac{d^4\Psi(0)}{d\rho^4} = \frac{3}{8} \mu^2 . \quad (25)$$

Дифференцируя уравнение (13) трижды по ρ , применительно к точке $\rho = 0$ находим

$$\frac{d^6\Psi(0)}{d\rho^6} = -\frac{5\mu}{6} \frac{d^4\Psi(0)}{d\rho^4}. \quad (26)$$

Учитывая (25), получаем ДГУ вида

$$\frac{d^6\Psi(0)}{d\rho^6} = -\frac{5}{16}\mu^3. \quad (27)$$

Последующие ДГУ, получаемые путём многократного дифференцирования уравнения (13), с использованием предыдущего ДГУ применительно к точке $\rho = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^8\Psi(0)}{d\rho^8} &= \frac{35\mu^4}{128}, \\ \frac{d^{10}\Psi(0)}{d\rho^{10}} &= -\frac{9\mu}{10} \frac{d^8\Psi(0)}{d\rho^8}, \\ \frac{d^{12}\Psi(0)}{d\rho^{12}} &= -\frac{11\mu}{12} \frac{d^{10}\Psi(0)}{d\rho^{10}}, \\ \frac{d^{14}\Psi(0)}{d\rho^{14}} &= -\frac{13\mu}{14} \frac{d^{12}\Psi(0)}{d\rho^{12}} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (28)$$

В первом приближении подставим (17) (при трех членах ряда) в (18), (20), (25)

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1; \\ a_1 + 9a_2 + 25a_3 &= 2\mu / \pi^2; \\ a_1 + 81a_2 + 625a_3 &= 6\mu^2 / \pi^4. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Из решения системы трех алгебраических уравнений (29) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{192\pi^4} (6\mu^2 - 68\pi^2\mu + 225\pi^4); \quad a_2 = \frac{1}{128\pi^4} (6\mu^2 - 52\pi^2\mu + 25\pi^4); \\ a_3 &= \frac{1}{384\pi^4} (6\mu^2 - 20\pi^2\mu + 9\pi^4). \end{aligned}$$

Отсюда соотношение (17) будет

$$\begin{aligned} \Psi(\rho) &= \frac{\cos(5\pi\rho/2)(6\mu^2 - 20\pi^2\mu + 9\pi^4)}{384\pi^4} - \\ &- \frac{\cos(3\pi\rho/2)(6\mu^2 - 52\pi^2\mu + 25\pi^4)}{128\pi^4} + \\ &+ \frac{\cos(\pi\rho/2)(6\mu^2 - 68\pi^2\mu + 225\pi^4)}{192\pi^4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Следуя интегральному методу теплового баланса, потребуем, чтобы соотношение (30) удовлетворяло осредненному уравнению (13)

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2\Psi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} + \mu\Psi(\rho) \right] d\rho = 0. \quad (31)$$

Подставив (30) в (31), находим

$$\begin{aligned} 0,000326776\mu^3 - 0,035286535\mu^2 + \\ + 0,91202758\mu - 4,274576548 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из решения уравнения (32) получаем

$$\mu_1 = 6,004; \quad \mu_2 = 30,465; \quad \mu_3 = 71,515. \quad (33)$$

Точные величины собственных чисел [3]

$$\mu_1 = 5,7831; \quad \mu_2 = 30,472; \quad \mu_3 = 74,886.$$

Подставив (14), (30) в (11), имеем

$$\Theta(\rho, Fo) = A \left[\sum_{k=1}^3 a_k \cos \left(\frac{z\pi}{2} \rho \right) \right] e^{-\mu Fo}, \quad (k = 1, 2, 3; \quad z = 2k-1). \quad (34)$$

Соотношение (34) представляет частное решение задачи (7) – (10). Найдём сумму частных решений

$$\Theta(\rho, Fo) = \sum_{i=1}^3 \left\{ A_i \left[\sum_{k=1}^3 a_k \cos \left(\frac{z\pi}{2} \rho \right) \right] e^{-\mu_i Fo} \right\}; \quad (i = k = 1, 2, 3; \quad z = 2k-1). \quad (35)$$

Потребуем выполнения ортогональности невязки начального условия к функциям $\cos(j\pi\rho/2)$, ($j = z = 2k-1$)

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ A_i \left[\sum_{k=1}^3 a_k \cos \left(\frac{z\pi}{2} \rho \right) - 1 \right] \cos \left(\frac{z\pi}{2} \rho \right) \right\} \right] d\rho = 0. \quad (36)$$

Свойство ортогональности косинусов приводит к следующим соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \left[a_1(A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \frac{\pi}{2} \rho - \cos \frac{\pi}{2} \rho \right] d\rho &= 0; \\ \int_0^1 \left[a_2(A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \frac{3\pi}{2} \rho - \cos \frac{3\pi}{2} \rho \right] d\rho &= 0; \\ \int_0^1 \left[a_3(A_1 + A_2 + A_3) \cos^2 \frac{5\pi}{2} \rho - \cos \frac{5\pi}{2} \rho \right] d\rho &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Соотношения (37) относительно A_1, A_2, A_3 представляют систему трех алгебраических уравнений. Её решение:

$$A_1 = 1,5778; \quad A_2 = -1,0547; \quad A_3 = 0,5804. \quad (38)$$

Соотношение (35) (с учетом (38)) является решением задачи (6) – (10) в третьем приближении.

Уточнение собственных чисел связано с выполнением ортогональности невязки уравнения (13) к функции (30)

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 \Psi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} + \mu \Psi(\rho) \right] \Psi(\rho) d\rho = 0. \quad (39)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &1,801 \cdot 10^{-7} \mu^5 - 3,5437 \cdot 10^{-5} \mu^4 + \\ &+ 2,455036 \cdot 10^{-3} \mu^3 - 7,1411182 \cdot 10^{-2} \mu^2 + \\ &+ 0,8386665935 \mu - 2,88359601 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение (40) имеет следующие действительные корни:

$$\mu_1 = 5,72108; \quad \mu_2 = 30,39991; \quad \mu_3 = 73,997245. \quad (41)$$

Комплексные корни не используются, так как они не имеют физического смысла.

Обсуждение (Discussions)

Из сравнения (33) и (41), заключаем, что выполнение условия ортогональности приводит к уточнению собственных чисел. В таблице даны собственные числа, найденные с учетом ортогональности, при различном числе приближений (числе членов ряда (17)) (верхняя строка таблицы), а также собственные числа, полученные по методу Л.В. Канторовича [5] при том же числе приближений (нижняя строка таблицы). Анализ представленных в табл. 1 результатов позволяет заключить, что уже в третьем приближении полученные собственные числа отличаются от точных их значений лишь в первом знаке после запятой, причем, начиная с μ_2 они точнее, чем собственные числа, найденные методом Л.В. Канторовича. С увеличением числа приближений собственные числа существенно уточняются. Так, с первого по седьмое собственные числа отличаются от точных лишь в первом знаке. Отметим, что существенное влияние на точность получаемых собственных чисел оказывает свойство ортогональности

тригонометрических функций в отличие от классических методов, в которых свойством ортогональности с весом обладают собственные функции, каждая из которых представляет бесконечный ряд (функцию Бесселя) и включает лишь одно собственное число. В целом, получаемое классическими методами решение представляет бесконечный ряд, составленный из функций Бесселя.

Из рис. 1 следует, что невязка уравнения (6) с увеличением числа Фурье стремится к нулю, а в точке $\xi = 0,1$ при $Fo \geq 0,2$ она практически равна нулю (см. рис. 2)

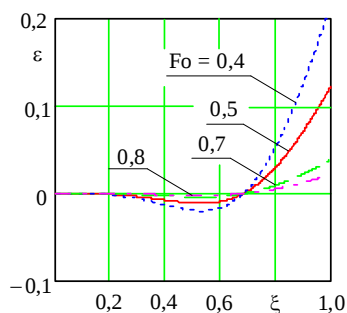


Рис. 1 Невязка уравнения (6) для различных Fo , $n=3$ (авторский результат) Fig. 1 The disjunction of equation (6) for different Fo , $n=3$ (author's result)

*Источник: составлено автором.

*Source: compiled by the author.

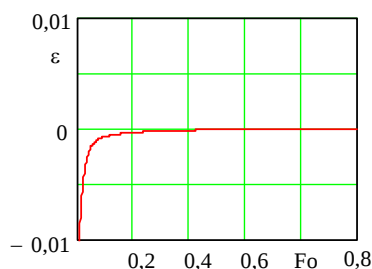


Рис. 2 Невязка уравнения (6) в точке $\xi = 0,1$ Fig. 2 Non-alignment of equation (6) at $\xi = 0.1$ at $n=3$ (author's result)
при $n=3$ (авторский результат)

*Источник: составлено автором.

*Source: compiled by the author.

Собственные числа	Число приближений					Точные значения [3]
	3	5	6	11	13	
$ \mu_1$	5,72108	5,756	5,76297	5,77543	5,77721	5,7831
	5,78242	5,78318	5,78318	5,78318	5,78318	
$ \mu_2$	30,39991	30,385	30,39859	30,43715	30,44417	30,472
	29,41325	30,4671	30,47111	30,47126	30,47126	
$ \mu_3$	73,99724	74,948	74,88174	74,83582	74,84123	74,886
	90,80431	73,9182	74,79153	74,887006	74,887006	
$ \mu_4$		137,747	138,79871	139,03231	139,01313	139,04
		139,752	135,66314	139,04025	139,04028	
$ \mu_5$		214,502	218,45243	222,91741	222,95688	222,93
		465,079	247,29025	222,92609	222,93226	
$ \mu_6$			314,58974	325,32256	326,19804	326,5
			871,000764	326,18441	326,558227	
$ \mu_7$				445,10378	447,44110	449,93

Продолжение таблицы

				444,62015	449,678179	
μ_8				583,62933	586,77318	593,04
				604,130334	588,803504	
μ_9				741,84139	745,44800	755,89
				963,22622	753,91442	
μ_{10}				919,04774	923,96264	938,479
				2027,01996	1056,58273	
μ_{11}				1113,6031	1121,66795	1140,8060
				7811,71109	1747,1555	
μ_{12}					1337,86177	1362,8721
					3750,56766	
μ_{13}					1571,22049	1604,6774
					14604,6257	

*Источник: составлено автором. *Source: compiled by the author

Заключение (Conclusion)

Разработана методика решения задачи Штурма – Лиувилля для тел с осевой и центральной симметрией, основанная на использовании ДГУ, выполнение которых эквивалентно выполнению уравнения в частных производных в точке $\rho = 0$. Показано, что его выполнение в граничной точке приводит к выполнению и внутри рассматриваемой области. Точность выполнения зависит от числа приближений, определяемых числом используемых ДГУ. Отмечается высокая точность нахождения собственных чисел, связанная как с использованием ДГУ, так и ортогональных систем тригонометрических координатных функций. Теоретическое и практическое значение полученных результатов состоит в том, что получаемые решения, в отличие от классических, не содержат специальных функций Бесселя, включая лишь простые алгебраические выражения в виде произведения тригонометрических координатных функций с экспоненциально стабилизирующимися во времени коэффициентами. Такой подход позволяет существенно упростить как процесс получения решения, так и окончательную формулу для него, что объясняется ортогональностью систем тригонометрических координатных функций, в отличие от функций Бесселя, обладающих свойством ортогональности с весом. В связи с чем существенно упрощается процесс выполнения начального условия, основанный на выполнении условия ортогональности его невязки ко всем тригонометрическим координатным функциям.

Литература

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. 4-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2018. 1072 с.
2. Карташов Э.М., Кудинов И.В., Кудинов В.А. Новые модельные представления нестационарного теплообмена // Известия РАН. Энергетика. 2019. №4, С. 1-8
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
6. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
7. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М: Издательство МЭИ, 2005. 568 с.
8. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. М: Энергоиздат, 1984. 418 с.
9. Федоров О.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 219 с.
10. Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций // Сибирский журнал Вычислительной математики. Новосибирск. 2019. Т. 22. С. 153 – 165.

11. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.
12. Котова Е. В., Кудинов В. А., Стефанюк Е. В., Тарабрина Т. Б. Метод понижения порядка уравнения в частных производных приведением к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям // Изв. вузов. Матем. 2018. № 8. С. 33–45.
13. Кудинов В.А., Котова Е.В., Кузнецова А.Э., Кудинов И.В. Ортогональные методы в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2012. №11 – 12. С. 49–59.
14. Кудинов И.В., Еремин А.В., Жуков В.В., Ткачев В.К., Трубицын К.В. Колебания твердых тел, жидкостей и газов с учетом локальной неравновесности. М.: ИНФРА-М, 2022. 162 с
15. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях: учебное пособие / Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Высшая школа: 2008. 390 с.
16. Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. Учебное пособие. 2-е изд., пер. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2018. 435 с.
17. Кудинов И.В., Еремин А.В., Трубицын К.В., Стефанюк Е.В. Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты. Москва. ООО «Проспект». 2020. 224 с.
18. Стефанюк Е.В. Управление потоком лазерного излучения при обработке материалов //Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2009. № 5-6. С. 10 – 17.
19. Tkachev V.K. Approximate analytical solution to the stationary two-dimensional heat conduction problem on infinite bar with the source of heat // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 552(1). 2019
20. Sobolev S.L. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable models // Physics Letters A. 2017.Vol. 381. Pp. 2893 – 2897.
21. Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano-films. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 108. Part A. P. 933 – 939.
22. Mikheeva G.V. Generalized functions in non-linear thermal conductivity problem for two-layer structure with heat source // J. Phys.: Conf. Ser. 2021, Vol. 1889, № 022025. DOI: 10.1088/1742-6596/1889/2/022025.
23. Mikheeva G.V., Pashin A.V. Investigation of heat transfer in metal nanofilms irradiated with ultrashort laser pulses: two-temperature model // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2094, № 022023. DOI: 10.1088/1742-6596/2094/2/022023.
24. O.D. Makinde, T.Iskander, F. Mabood, W.A. Khan, V.S. Tshehla. MHD Couette-Poiseuille flow of variable viscosity nanofluids in a rotating permeable channel with Hall effect // Journal of Molecular Liquids. 2018. Vol. 221. P. 778 – 787.
25. Hasona W.M., El-Shehipi A.A., Ybrahim M.G. Combined effects of magnetohydrodynamic and temperature dependent viscosity of peristaltic flow of Jeffrey nanofluid through a porous medium: applications to oil refinement // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. Vol. 126. P.700 – 714.
26. M.E. Gurtin, A.C. Pipkin, A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 31(1968)113.

Авторы публикации

Котова Евгения Валериевна – канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика», Самарский государственный технический университет. ORCID 0000-0003-4423-2738. email: larginaevgenya@mail.ru

Клеблеев Руслан Мухтарович – старший преподаватель кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика», Самарский государственный технический университет. ORCID 0000-0002-6944-8503, email: totig@yandex.ru

Кудинов Василий Александрович – доктор ф.-м. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика», Самарский государственный технический университет. ORCID 0000-0002-3071-5168 totig@yandex.ru.

References

1. Kartashov EM, Kudinov VA. *Analytical methods of the theory of thermal conductivity and its applications*. 4th ed. Moscow: LENAND; 2018.
2. Kartashov EM, Kudinov IV, Kudinov VA. The New Model Ideas Unsteady Heat Trasfer. *PROCEEDINGS OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES. POWER ENGINEERING*. 2019;4: 1–8. DOI: 10.1134/S0002331019040058.
3. Lykov AV. *Teoriia teploprovodnosti*. Moscow, Vyssh. shk.; 1967. (In Russ).
4. Tikhonov AN, Samarskii AA. *Equations of Mathematical Physics*. Courier Corporation, 2013.
5. Kantorovich LV, Krylov VI. *Priblizhennyye metody vysshego analiza*. Moscow: Gosteorizdat; 1952.
6. Belyaev NM, Ryadno AA. *Metody nestatsionarnoi teploprovodnosti*. Moscow: Vyssh. Shk.; 1978.
7. Tsoi PV. *Sistemnye metody rascheta kraevih zadach teplomassoperenosa*. M: Izdatel'stvo MEI; 2005.
8. Coj PV. *Metody rascheta zadach teplomassoperenosa*. M.: Energoizdat; 1984.
9. Fedorov F. M. *Granichnyi metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoi fiziki*. Novosibirsk, Nauka; 2000.
10. Kudinov I., Kotova E., Kudinov V. A Method for Obtaining Analytical Solutions to Boundary Value Problems by Defining Additional Boundary Conditions and Additional Sought-For Functions. *Numerical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 12. № 2. pp. 126–136. DOI: 10.1134/S1995423919020034.
11. Kudinov VA, Kudinov IV, *Metody resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii perenosa tepla massy i impulsa*. M: Knizhnyi dom «Librokom»; 2020.
12. Kotova EV, Kudinov VA, Stefanyuk EV, Tarabrina TB. Method of decreasing the order of a partial differential equation by reducing to two ordinary differential equations. *Russian Mathematics*. 2018; 62(8): 27–37.
13. Kudinov VA, Kotova EV, Kuznetsova AE, Kudinov IV. Orthogonal methods in heatconduction tasks with variable physical environmental conditions. *Power engineering: research, equipment, technology*. 2012. 11–12: 49–59.
14. Kudinov IV, Eremin AV, Zhukov VV, Tkachev VK, Trubitsyn KV Vibrations of solids, liquids and gases taking into account local disequilibrium. M: INFRA-M. 2022. 169 p.
15. Kudinov VA, Averin BV, Stefanyuk EV. *Teploprovodnost' i termouprugost' v mnogoslojnykh konstrukciyax: Uchebnoe posobie*. Moskva. Vysshaya shkola: 2008. 390 p.
16. Kartashov E.M., Kudinov V.A., Kalashnikov V.V. *Teoriya teplomassoperenosa: reshenie zadach dlya mnogoslojnykh konstrukcij*. Uchebnoe posobie. 2-e izd., per. i dop. M.: Izdatel'stvo Yurajt, 2018. 435 p.
17. Kudinov IV, Eremin AV, Trubitsyn KV, Stefanyuk EV. *Models in thermomechanics with a finite and infinite velocity of heat propagation*. Limited Liability Company Prospekt; 2020.
18. Stefanyuk E.V. Upravlenie potokom lazernogo izlucheniya pri obrabotke materialov. *Izvestiya visshih uchebnykh zavedenii. Problemi energetiki*. 2009. № 5–6. S. 10–17.
19. Tkachev V.K. Approximate analytical solution to the stationary two-dimensional heat conduction problem on infinite bar with the source of heat. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 552(1). 2019.
20. Sobolev S.L. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable models. *Physics Letters A*. 2017. Vol. 381. Pp. 2893 – 2897.
21. Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 108. Part A. P. 933 – 939.
22. Mikheeva G.V. Generalized functions in non-linear thermal conductivity problem for two-layer structure with heat source. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021, Vol. 1889, № 022025. DOI: 10.1088/1742-6596/1889/2/022025.
23. Mikheeva G.V., Pashin A.V. Investigation of heat transfer in metal nanofilms irradiated with ultrashort laser pulses: two-temperature model. *Journal of Physics: Conference*

Series. 2021. Vol. 2094, № 022023. DOI: 10.1088/1742-6596/2094/2/022023.

24. Makinde O., Iskander T., Mabood F., et al. MHD Couette-Poiseuille flow of variable viscosity nanofluids in a rotating permeable channel with Hall effect. *Journal of Molecular Liquids*. 2018. Vol. 221. pp. 778 – 787.

25. Hasona W., El-Shehhipi A., Ybrahim M. Combined effects of magnetohydrodynamic and temperature dependent viscosity of peristaltic flow of Jeffrey nanofluid through a porous medium: applications to oil refinement. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 126. pp.700 – 714.

26. Gurtin M.E., A.C. Pipkin, A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1968. 31 (1968) 113. DOI:10.1007/BF00281373.

Authors of the publication

Eugeneya V. Kotova (Cand. Techn. Sci.) – Samara State Technical University, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics, Samara, Russia. ORCID 0000-0003-4423-2738. email: larginaevgenya@mail.ru.

Vasily A. Kudinov (Dr. Phys. & Math. Sci.) – Samara State Technical University, Head of Dept., Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics, Samara, Russia. ORCID 0000-0002-6944-8503, email: totig@yandex.ru.

Ruslan M. Klebleev – Samara State Technical University, Dept. of Theoretical Fundamentals of Heat-Engineering and Hydromechanics, Samara, Russia. ORCID 0000-0002-3071-5168 totig@yandex.ru.

Шифр научной специальности: 2.4.6. Теоретическая и прикладная теплотехника (технические науки).

Получено 17.07.2023г.

Отредактировано 01.08.2023г.

Принято 07.08.2023г.