

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИДИСПЕРСНЫХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

Р.Ш. ЛОТФУЛЛИН* , А.Ю. КУБАРЕВ** , Ю.Г. КУБАРЕВ**

* Казанский государственный аграрный университет

** Казанский государственный энергетический университет

Исследованы микроскопические процессы ядерной спин-решеточной релаксации в полидисперсных сегнетоэлектриках на основе дифференциальных уравнений в дробных производных. Установлена прямая связь между индексами полидисперсии и фрактальной размерности.

Ключевые слова: ядерная спин-решеточная релаксация, полидисперсные сегнетоэлектрики, фракталы.

Скорость спин-решеточной релаксации (СРР) в области фазовых переходов в значительной степени определяется состоянием диэлектрической подсистемы кристалла, и, конечно, если кинетика или восприимчивость претерпевают изменения, это не может не сказаться на релаксационных свойствах таких соединений. Будем считать, что скорость ядерной СРР, обусловленная тепловыми флуктуациями магнитного диполь-дипольного или квадрупольного взаимодействий, согласно теории Бломбергера-Парселла-Паунда (БПП), является функцией спектральной плотности и выражается, согласно диссипативно-флуктуационной теореме, через мнимую часть обобщенной диэлектрической восприимчивости:

$$J(\omega) = |F(0)|^2 \frac{T}{\omega} \int_0^{k_0} \text{Im} \chi(k, \omega) dk. \quad (1)$$

Здесь коэффициент $F(0)$ пропорционален Фурье-компоненте функции магнитного диполь-дипольного или квадрупольного взаимодействий, а интегрирование проводится по первой зоне Бриллюэна до граничного значения вектора когерентности k_0 .

Полидисперсность системы может быть учтена, если исходить из одной из возможных форм восприимчивостей: резонансной или релаксационной. Для определенности выражение полидисперсной восприимчивости запишем в релаксационном виде:

$$\begin{aligned} \chi(k, \omega) &= \chi(k, 0) [1 + (i\omega\tau_k)^v]^{-1}, \\ \chi(k, 0) &= C [T - T_c(k)]^{-1}, \\ \tau_k &= \tau_0 [T - T_c(k)]^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В изотропном случае длинноволнового приближения $T_c(k) = T_c(1 - \alpha k^2)$. В области фазового перехода, где $\omega\tau_0 \gg 1$, интеграл (1), как для восприимчивости (2), так и для полидисперсной восприимчивости вида

$$\chi(k, \omega) = \chi(k, 0)(1 + i\omega\tau_k)^{-\nu} \quad (3)$$

является сходящимся. Поэтому предметом нашего исследования служит аналитическое поведение $1/T_1$ в области быстрого движения $\omega\tau_0 \ll 1$. В этой области для восприимчивости (3) выполняется соотношение

$$\text{Im}\chi(k, \omega) \propto \frac{C(\omega\tau_0 T)^\nu}{[T - T_c(k)]^{\nu+1}}.$$

Используя последнее соотношение при интегрировании в длинноволновом приближении, получаем скорость аномальной СРР в виде [1]:

$$\frac{1}{T_1} = A\tau_0^\nu \omega^{\nu-1} (T/T_c)^{\nu+1} t^{\nu-1/2} L[k_0(\alpha t)^{1/2}] \quad (4)$$

$$L(u_0) = \int_0^{u_0} \frac{u^2 du}{(1+u^2)^{\nu+1}}, \quad u_0 = k_0(\alpha t)^{1/2}, \quad t = \frac{T_c}{T - T_c}.$$

Сходимость интеграла (4) при $u \rightarrow \infty$ (или при $T \rightarrow T_c$) существенно зависит от параметра полидисперсии, и поэтому оценка интеграла $L(u_0)$ при $u_0 \gg 1$ дает:

$$L(u_0) \mu u_0^{1-2\nu} / (1-2\nu), \quad \nu < 0,5,$$

$$L(u_0) \propto \ln(u_0), \quad \nu = 0,5, \quad (5)$$

$$L(u_0) \mu (2\nu - 1)^{-1}, \quad \nu > 0,5.$$

Отсюда сингулярность скорости аномальной релаксации, согласно соотношениям (1) – (5), в зависимости от параметра ν имеет вид:

$$\text{Const}, \quad \nu < 0,5,$$

$$\frac{1}{T_1} \propto \ln t, \quad \nu = 0,5, \quad (6)$$

$$t^{2\nu-1}, \quad \nu > 0,5.$$

Если взаимодействие коллективных возбуждений носит анизотропный характер, что соответствует дисперсионной зависимости

$$T_c(k) = T_c(1 - \alpha k^2 - \gamma \cos^2 \theta), \quad \cos \theta = \frac{k_z}{k}, \quad (7)$$

критическая температурная зависимость скорости релаксации пропорциональна интегралу

$$K(t) = \int_0^{\gamma^{1/2}(\alpha k_0^2)^{1/2}} \int_0^{\gamma^{1/2}(\alpha k_0^2)^{1/2}} \frac{k_x^2 dk_x dk_y}{(t^{-1} + k_x^2 + k_y^2)^{\nu+1}}. \quad (8)$$

Сходимость этого интеграла также оказывается очень чувствительна к значению параметра полидисперсии и для $\nu = 1$ имеет место логарифмическая сингулярность. Для других значений ν заменой переменных: k_x^2, k_y^2 .

$$k_x = (z - t^{-1})^{1/2} \sin \varphi, k_y = (z - t^{-1})^{1/2} \cos \varphi,$$

приведем исходный интеграл к виду

$$K(t) \mu \int_{z_1}^{z_2} \frac{(z - t^{-1}) dz}{z^{v+1}} = \frac{v(z - t^{-1}) + t^{-1}}{v(v-1)z^v}, \quad (9)$$

Отсюда видно, что при всех значениях $v < 1$ интеграл не имеет критической зависимости от температуры и, следовательно, учет полидисперсии кристалла в данном случае приводит к подавлению эффекта аномальной релаксации.

В пределе быстрого движения другой вид полидисперсной восприимчивости не дает ничего нового по сравнению с рассмотренным, так как при $\omega\tau_0 \ll 1$ эти восприимчивости совпадают с точностью до постоянных коэффициентов. Предложенный вывод выражения (6), основанный на определенном виде полидисперсных восприимчивостей, является наиболее простым и наглядным, хотя к данному результату можно прийти непосредственно из кинетических соотношений полидисперсных систем путем прямых вычислений.

Проведенный анализ показывает существенную зависимость релаксационных явлений от характера полидисперсии. Для изотропных взаимодействий расходимость $1/T_1$ возможна лишь при $v \geq 0,5$. Причем критическая зависимость скорости релаксации при $v=0,5$ имеет чисто логарифмическую сингулярность, аналогичную для анизотропного взаимодействия в монодисперсных системах. В то же время в анизотропном случае включение полидисперсии приводит к полному исчезновению аномальной зависимости $1/T_1$. Формально полидисперсия здесь выступает как механизм усиления анизотропии взаимодействия, приводящий к дальнейшему подавлению даже слабых логарифмических расходимостей.

В литературе имеется ряд экспериментальных результатов, которые подтверждают правильность полученных соотношений (6) и (9). Так при исследовании $1/T_1$ в триглицинсульфате (ТГС) в одной из работ [2] была обнаружена аномалия в области фазового перехода, которая получила объяснение в рамках теории квазирезонансных возбуждений, а в более ранней экспериментальной работе [3] данная аномалия отсутствовала. Благодаря проведенным вычислениям, оба этих результата находят удовлетворительное объяснение, если учесть, к тому же, данные диэлектрических измерений в ТГС, указывающие на различные полидисперсные свойства исследованных соединений, т.е. кристаллы ТГС в зависимости от условий роста могут существовать в нескольких полидисперсных модификациях.

Другим экспериментальным фактом, отражающим полидисперсные свойства кристаллов, являются различные значения критических индексов $1/T_1$ до и после фазового перехода, а также невозможность в некоторых случаях описать температурные аномалии скорости СРР одним критическим индексом даже в рамках одной фазы. Экспериментальные подтверждения этих предположений, согласно измерениям диаграмм Коул-Коула, связаны с наблюдением температурной зависимости параметра полидисперсии в области фазового перехода, что и приводит к различным значениям величины $2v-1$ в $1/T_1$. Таким образом, полидисперсия кристалла отражается не только на диэлектрической восприимчивости, но и на критическом поведении скорости релаксации и поэтому может быть экспериментально обнаружена методом ЯМР релаксации.

В отличие от монодисперсных кристаллов, где отсутствует частотная зависимость $1/T_1$, в данном случае выражение (4) имеет зависимость,

пропорциональную $\omega^{\nu-1}$. Такая слабая зависимость от частоты иногда наблюдалась на эксперименте [4] и всегда связывалась или с точностью измерения, или с дефектностью. Альтернативой этого служит зависимость типа (4), а однозначность ответа можно установить, увеличив частоту наблюдения, что, по существу, дает новый способ определения параметра полидисперсии.

Физическая природа полидисперсии

Чтобы понять природу уравнения

$$\left(\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} + \lambda\right)q(t) = h(t),$$

продифференцируем его еще раз по времени и воспользуемся определением дробной производной. Тогда данное уравнение представляется в форме линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода [5, 6]:

$$\varphi(x) = g(x) - \lambda^{-1} \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt, \quad (10)$$

$$g(x) = \frac{df}{dx}, \quad K(x,t) = (x-t)^{-\nu-1} / \Gamma(\nu).$$

Согласно общей теории интегральных уравнений Вольтерра, эти уравнения возникают в тех задачах, в которых существует предпочтительное направление изменения независимой переменной. В случае кристаллов такая ситуация характерна при учете анизотропии физических свойств или ярко выраженной неоднородности, которые и могут служить, тем самым, одной из причин полидисперсии.

Другим физическим обоснованием данного дифференциального уравнения является учет эффектов запаздывания, когда сила, действующая на динамическую переменную в момент времени t , зависит не только от скорости $q(t)$, но и от скоростей в предыдущие моменты времени. В общем случае соответствующее уравнение, согласно теории колебаний нелинейных систем с запаздыванием, имеет вид

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 2\zeta \frac{dq(t)}{dt} + \nu^2 q(t) + T(t)q(t-\tau) = 0. \quad (11)$$

В частном случае это общее уравнение через функцию памяти $M(t-\tau)$ может быть представлено как

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \int_0^t M(t-\tau)q(\tau) d\tau + \gamma q(t) = 0, \quad (12)$$

Если функция памяти представляется дельта-функцией Дирака, то эффекты запаздывания отсутствуют и уравнение (12) идентично с

$$\alpha \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \beta \frac{dq(t)}{dt} + \gamma q(t) = f(t).$$

Для уравнения (10) функция памяти равна $(t-\tau)^{-\nu} / \Gamma(1-\nu)$. Здесь и в дальнейшем пока учитываются только нулевые начальные условия:

$$q(t)|_{t=0} = \frac{dq(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{d^2 q(t)}{dt^2}|_{t=0} = 0, \text{ которые позволяют получать и использовать}$$

обратные преобразования сингулярного оператора дифференцирования, т.к. только для определенного класса функций, а именно $q(0)=0$, можно ввести обратный оператор.

При произвольных начальных условиях функция памяти в общем случае находится из интегро-дифференциального уравнения и, скорее всего, является обобщенной функцией:

$$\int_0^t M(t-\tau)q(\tau)d\tau = \frac{d^v}{dt^v} q(t).$$

В полной мере вышеперечисленные аргументы реализуются в высокоэластичных полимерах, в которых при действии механических напряжений имеет место упругая и высокоэластичная обратимая деформация.

Основной отличительной особенностью высокоэластичной деформации является ее зависимость от временных режимов упругих деформаций и то, что ее следует рассматривать как самостоятельный тип обратимой деформации, а не результат суммирования упругости и внутреннего трения. Основанием такого утверждения могут служить следующие факты: 1) высокоэластичность характеризуется низкими значениями модулей упругости, которые на два-три порядка меньше, чем для обычных веществ; 2) большими величинами обратимых деформаций $>1000\%$; 3) обратными знаками тепловых эффектов деформации и температурного коэффициента модуля упругости. Следовательно, сила, сопряженная с динамической функцией, например со смещением, состоит из трех частей: силы вязкости, упругой силы и силы F_η , ответственной за эффекты типа высокоэластичности. Как показано в работе [6], сила F_η может быть определена из уравнения

$$q(t) = \frac{1}{\zeta} \frac{d^{-v}}{dt^{-v}} F_\eta \quad (0 < v < 1, \zeta = \text{const}). \quad (13)$$

Здесь дробная производная дается соотношением типа

$$\frac{d^v}{dt^v} q(t) = \frac{1}{\Gamma(1-v)} \frac{d}{dt} \int_0^t q(\tau)(t-\tau)^{-v} d\tau.$$

Из последнего соотношения следует, что если сила F_η действует только при $0 < t < t_0$, то

$$\lim q(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta \Gamma(v)} \int_0^{t_0} F_\eta(\tau)(t-\tau)^{v-1} d\tau < \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta \Gamma(v)} \max |F_\eta(t)| |t^v - (t-t_0)^v| \rightarrow 0$$

и поэтому никаких остаточных перемещений не сохраняется т.е. деформации обратимы. Также можно убедиться, что для периодической силы в режиме установившихся колебаний наблюдается отставание перемещения от силы. Таким образом, силы F_η связаны с полидисперсией и также могут служить обоснованием данных уравнений, по крайней мере для полимеров и родственных соединений.

Сделаем некоторые замечания о полидисперсии в кристаллических веществах, ограничиваясь областью фазовых переходов. Если провести аналогию предфазового состояния кристалла с некоторыми высокоэластичными полимерами, то выявляется ряд общих черт. Как и в высокоэластичных полимерах, вблизи T_c податливость кристалла или эластичность увеличивается, т.е. малые внешние возмущения вызывают значительный отклик. Кроме этого, в окрестности T_c растет радиус корреляции (дальний порядок) и данные выделенные кластеры с числом частиц $N \gg 1$ по своим свойствам схожи с поведением макромолекул полимеров. Ясно, что упругие силы

данных кластеров, как и полимерных цепей, только в известном приближении можно считать подчиняющимися соотношениям типа закона Гука, так как коэффициент жесткости обратно пропорционален размеру кластера. По-видимому здесь стоит согласиться с утверждением ряда авторов об энтропийной природе сил упругости данных систем [7].

К этому следует добавить, что среди кристаллических соединений имеется еще один класс объектов с подобными свойствами – это кристаллы с крупномасштабными образованиями [1]. Если учесть, что проблемы фазовых переходов таких систем сводятся к задаче протекания (перколяции), то аналогия становится более полной. Кроме того, структурные аспекты полидисперсных кристаллических соединений указывают на неоднородный характер, а в некоторых случаях – на низкомерность или, в конечном счете, на фрактальность данных систем. Вследствие этого динамическое поведение таких объектов должно отличаться от обычных кристаллов, что и было показано для диффузионных процессов на фракталах [9].

Таким образом, предложенные дифференциальные уравнения в дробных производных, записанные из самых общих предположений, достаточно хорошо описывают восприимчивости и кинетику конкретных полидисперсных систем. Решение этих уравнений удалось получить благодаря сведению их к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Но теория интегральных уравнений типа Вольтерра непосредственно смыкается с теорией дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [10]. Поэтому можно считать, что явление полидисперсии является следствием влияния эффектов анизотропии и запаздывания взаимодействий.

К уравнению Вольтерра второго рода могут быть сведены и линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^n}{dt^n} q(t) + a_1(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} q(t) + \dots + a_n(t) q(t) = F(t), \quad (14)$$

с непрерывными коэффициентами при начальных условиях $q(0) = C_0$,

$\frac{d}{dt} q(t) \big|_{t=0} = C_1 \dots \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} q(t) \big|_{t=0} = C_{n-1}$, а это указывает на тот факт, что используемые уравнения обязаны учету высших производных и в этом смысле эквивалентны (14).

Как следует из полученных решений, аргументом функции Миттаг-Леффлера является λt^ν , т.е. временная зависимость спада определяется степенью дробной производной или параметром полидисперсии. А это означает, что временные спады не могут быть выражены одной экспонентой (исключение составляет случай $\nu=1$). В зависимости от структуры исходного дифференциального уравнения спектр собственных значений дифференциального оператора может иметь дискретный или непрерывный набор. Благодаря этому решение $q(t)$ при произвольном $\nu \neq 1$ представляет собой конечный или бесконечный ряд экспонент и в этом смысле согласуется с моделью распределения времен корреляции [11].

Следовательно, параметр полидисперсии диэлектрических восприимчивостей есть не что иное, как порядок дробной производной соответствующего дифференциального уравнения. С другой стороны, согласно формуле Коши:

$$q^{(\nu)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t q(\tau) (t-\tau)^{\nu-1} d\tau = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{\nu-1}} q(\tau) d\tau dt_1 \dots dt_{\nu-1}$$

дробная производная пропорциональна повторному интегралу по последовательным интервалам времен, что в данном случае является следствием эффектов запаздывания.

Если последний интеграл представить в виде свертки регулярной функции со степенной обобщенной функцией:

$$q^{(v)}(t) = q(t) A \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)}, \quad (15)$$

то дробная производная отражает факт усреднения по временным интервалам с соответствующим весом. Количество временных интервалов связано с индексом полидисперсии или размерностью характеристических времен (возможно неоднородностью). Поскольку индекс v величина дробная, то, скорее всего, индекс полидисперсии есть функция дробной размерности (фрактальности), хотя последнее утверждение, конечно, требует более строгого доказательства. Некоторые аргументы в пользу этого утверждения можно привести, если воспользоваться результатами экспериментальных и теоретических исследований недебаевской релаксации. Так для броуновской диффузии на фракталах для некоторых мод релаксация напряжений $\sigma(t)$ имеет вид [12]

$$\sigma(t) \propto \sigma(\infty) - A \exp[-B \langle r^2(t) \rangle],$$

где диффузионная длина $\langle r^2(t) \rangle$ при определенных условиях связана с индексом фрактальной размерности d_f соотношением $\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2/d}$.

Как следует из последнего выражения, одной из возможных физических причин появления недебаевских спадов корреляционных функций является влияние случайных блужданий в различных неупорядоченных системах. При этом пространственный беспорядок определяет соответствующий фрактал, длинноволновые корреляции которого выражаются через фрактальную размерность. Но фракталы можно ввести не только для пространственного, но и для временного беспорядка. Тем более, что модели, учитывающие движение во фрактальном времени, уже исследовались для объяснения аномального поведения эффектов переноса и релаксации в ряде аморфных соединений [13, 14]. К тому же сам пространственный беспорядок может привести к временному [13].

Основной чертой фракталов является инвариантность каждого отдельного объекта или их ансамбля относительно группы масштабных преобразований. Следовательно доказательством фрактальной природы времен является наличие временного скейлинга для корреляционных функций или, тоже самое, наличие временных асимптотик. Поэтому в этой связи ясно, насколько важно знать временные асимптотики динамических переменных.

Для тех же случайных блужданий было показано, что среднее смещение $r(t)$ растет медленнее, чем t . Более того, на этот медленный рост накладываются еще незатухающие осцилляции [13].

Необходимое условие существования непрерывного решения интегрального уравнения типа свертки (15) состоит в том, что функция $q(t)$ должна иметь непрерывные производные до n -го порядка, а все ее $n-1$ производные – обращаться в нуль при $t=0$. В этом случае решение интегрального уравнения существует тоже, но уже в классе обобщенных функций.

Как отмечено выше, другая причина полидисперсии может быть обусловлена особенностями сил трения и сил упругости структурных элементов. Этот случай рассмотрим на примере полимеров. Кинетическое уравнение в форме

$$\xi \frac{dq}{dt} = -kq$$

предполагает, что время релаксации $\tau = \xi/k$, а различные динамические модели соответствуют лишь разнообразным реализациям упругой постоянной k и коэффициента трения ξ . Но даже идеальная модель релаксационных мод Рауза имеет более сложную структуру уравнения:

$$\frac{dq_n}{dt} = \sum_m a_{mn} \Phi_m, \quad \Phi_m = -\frac{\partial F}{\partial q_m}. \quad (16)$$

В более реалистической модели a_{nm} станет функцией расстояния $|r_m - r_n|$, а уравнение становится нелинейным и моды перемешиваются. Поэтому здесь скорее естественен непрерывный спектр времен релаксации. Если, к тому же, учесть энтропийный вклад в силу упругости

$$\varphi(q) = -CT(q/q_0)^{\delta-1}, \quad \delta \neq 2, \quad (17)$$

который отличается от закона Гука, то становится ясно, что кинетическое уравнение (16) не может быть столь простым даже для релаксационных мод. Как показано П. де Женем [7], силы трения также неоднозначно зависят от размера макромолекулы, что приводит к дополнительному усложнению уравнений. С физической точки зрения данные особенности полидисперсии связаны с неоднородными свойствами структуры объектов, так как соотношение (17) есть следствие усреднения по конфигурациям с вероятностью реализаций пропорциональной $\exp(-(q/q_0)^\delta)$.

Выводы

Теоретические исследования полидисперсного состояния вещества на основе дифференциальных уравнений в дробных производных показали, что здесь имеют место совершенно необычные свойства соединений, изучение которых требует нетрадиционного подхода, пересмотра многих физических представлений и использования новых математических методов описания. Показано, что в области фазовых переходов кристаллических материалов явление полидисперсии связано с особенностями поведения упругих свойств твердых тел, эффектами запаздывания взаимодействий, фрактальными характеристиками объектов и их неоднородностью. Структура дробного дифференциального оператора, его спектр собственных значений и временные асимптотики параметра порядка есть следствие динамического поведения полидисперсной фазы. Имеется прямая связь явления полидисперсии не только с диэлектрическими характеристиками вещества, но и температурным поведением скорости спин-решеточной релаксации. Для изотропного спектра критических колебаний получена степенная и логарифмическая сингулярности скорости релаксации, полностью подавляемые анизотропными взаимодействиями. Подтверждена модель распределения времен корреляции как частный случай полидисперсного состояния, описываемого определенным типом дифференциального оператора. Анализ измерений диэлектрических восприимчивостей (диаграмм Коул-Коула) и температурных аномалий скорости релаксации позволяет определить степень полидисперсии или порядок дробной производной динамического дифференциального уравнения.

Summary

Microscopical processes of nuclear spin lattice relaxation in polydispersion ferroelectrics based on differential equation in fractional operationals are investigated. Direct bound between index of polydispersion and fractal dimension are established.

Key Words: nuclear spin-lattice relaxation, polydispersion ferroelectrics, fractals.

Литература

1. Кубарев Ю.Г., Попов М.А. Аномальная релаксация в полидисперсных сегнетоэлектриках // Радиоспектроскопия твердого тела. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1979. С. 64–69.

2. Самко С.Г., Килбас А., Маричев О.М. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Avogadro A., Cavelins E., Muller D., Petersson J. Study of the Nuclear Spin-Lattice Relaxation of ^{23}Na in the Paraelectric and Ferroelectric Phase NaNO_2 . // Phys.Stat.Sol. (b). – 1971. – Vol. 44, N 2. – P. 639-646.
4. Mendelson K.S. Nuclear Magnetic Relaxation in Fractal Pores // Phys.Rev. – 1986. – Vol. B34, N 9. – P. 6503-6505.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интего-дифференциальных уравнений. М: Наука, 1982. 304 с.
6. Кубарев Ю.Г., Лотфуллин Р.Ш. Релаксационные свойства магнитных систем. Казань: КГЭУ, 2006. 87 с.
7. П. де Жен. Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982. 368 с.
8. Корженевский А.Л. Аномальное рассеяние света вблизи точек фазовых переходов в кристалле с крупномасштабными неоднородностями. // ФТТ. 1987. Т. 29, в. 9. С. 2754–2757.
9. Nigmatullin R.R. The Realization of the Generalized Transfer Equation in a Medium with Fractal Geometry // Phys.Stat.Sol(b)/ - 1986/ - Vol. 133, N 1/ - P. 425-432.
10. Кубарев Ю.Г. Динамические свойства полидисперсных систем: Препринт №707 Ф. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1991. 25 с.
11. Григорьев В.П., Маклаков В.М. Влияние распределения времен корреляции на ширину линии ЯМР // ВМС. 1971. Т. B13, №9. С. 652–653.
12. Ghosh M., Chakrabarti B.K., MaJumdar K.K., Shakrabarti R.N. Relaxation Study in Percolating Solids // Phes.Rev. – 1990. - Vol. B41, N 1. – P. 731-739.
13. Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. 672 с.
14. Shlesinger M.R., Hughes B.D. Analogs of Renormalization group Transformations in Random processes // Physica. – 1981. – Vol. 109A, N. 3. – P. 597-608.

Поступила в редакцию

06 декабря 2016 г.

Лотфуллин Равиль Шарипович – канд. физ. мат. наук, доцент кафедры «Физика» Казанского государственного аграрного университета (КГАУ). Тел. (843) 261- 63- 47. E-mail: kazgau@mail.ru.

Кубарев Артем Юрьевич – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электрические станции» (ЭС) Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ). E-mail:artemkubarev@yandex.ru.

Кубарев Юрий Григорьевич – д-р физ. мат. наук, профессор кафедры «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ). Тел. (843) 519-42-76. E-mail:artemkubarev@yandex.ru.