



## АНАЛИЗ ЛОКАЛЬНОЙ РОБАСТНОСТИ ПОЗИЦИОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА-БИЛЕРА

Малёв Н.А.

Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Россия  
maleev@mail.ru

**Резюме:** АКТУАЛЬНОСТЬ данной работы заключается в анализе локальной робастности управляемого электропривода, представляющем собой ключевую задачу в случае функционирования в условиях неопределенности, когда одним из важнейших требований к системе является поддержание способности объекта исследования сохранять стабильность и требуемое качество процессов управления при влиянии дестабилизирующих факторов различной физической природы. ЦЕЛЬ. В работе исследуются системные свойства позиционного электропривода с определением количественных оценок допустимых вариаций параметров математической модели системы. Целевой установкой данной аналитики является оценка прямых и косвенных показателей качества функционирования позиционного электропривода на основе сформированного в результате исследования интервального полинома с применением методов компьютерного моделирования. Анализ локальной робастности позволяет оценить границы асимптотической устойчивости исследуемой системы в условиях параметрических возмущений. Формирование интервального многочлена на основе аппарата полиномов Эрмита-Билера и компьютерное моделирование исследуемого позиционного электроприводов в диапазоне рассчитанных границ вариаций параметров является важной и актуальной задачей. МЕТОДЫ. При решении задачи исследования применялись методы математического анализа, теории устойчивости и теории систем автоматического управления, векторно-матричные уравнения в форме пространств состояний и дифференциальные уравнения в операторной форме записи, математический аппарат полиномов Эрмита-Билера, а также моделирование уравнений динамики исследуемого электропривода в программной среде MatLab. РЕЗУЛЬТАТЫ. В работе решена задача анализа локальной робастности позиционного электропривода и получен интервальный полином с нижней и верхней границами коэффициентов, сопровождающий характеристический многочлен исследуемой системы. На основании результатов анализа проведено компьютерное моделирование и получены количественные оценки показателей качества функционирования исследуемого электропривода во временной и частотной областях. Приведены графики дополнительного движения, позволяющие при формировании объектов управления данного класса с устройствами коррекции и измерения компонентов вектора состояния проводить сравнительный анализ конфигурации исследуемой системы на предмет потенциальной стабильности показателей качества функционирования в условиях параметрических возмущений. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Исследование системных свойств позиционного электропривода по выходу его математической модели с точки зрения анализа локальной робастности позволяет оценить диапазон вариаций параметров по степени достижимости требуемых показателей качества функционирования объекта исследования с использованием характерных особенностей различных алгоритмов управления. Результаты проведенного анализа обеспечивают возможность рационально распределять ресурсы управления на основе классических алгоритмов, оценивать эффект введения в систему регуляторов выходных координат в условиях параметрических возмущений, а также проводить сравнение альтернативных вариантов формирования алгоритмов коррекции с применением классических методов с адаптивным подходом поискового или аналитического (беспоискового) видов, базирующихся на использовании эталонных моделей объекта исследования с идентификационным или прямым типами управления.

**Ключевые слова:** локальная робастность; характеристический полином; позиционный электропривод; устойчивость; качество функционирования; неопределенность; параметрические возмущения.

**Для цитирования:** Малёв Н.А. Анализ локальной робастности позиционного электропривода с применением полиномов Эрмита-Биляра // Известия высших учебных заведений. ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ. 2025. Т. 27. № 5. С. 67-85. doi: 10.30724/1998-9903-2025-27-5-67-85.

## ANALYSIS OF LOCAL ROBUSTNESS OF A POSITIONAL ELECTRIC DRIVE USING HERMITE-BIEHLER POLYNOMIALS

Malev N.A.

Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia  
maleev@mail.ru

**Abstract:** THE RELEVANCE of this work lies in the analysis of the local robustness of a controlled electric drive, which is a key task in the case of operation under conditions of uncertainty, when one of the most important requirements for the system is to maintain the ability of the object of study to maintain stability and the required quality of control processes under the influence of destabilizing factors of various physical natures. PURPOSE. The paper studies the system properties of a positional electric drive with the definition of quantitative estimates of permissible variations in the parameters of the mathematical model of the system. The target setting of this analysis is to evaluate direct and indirect indicators of the quality of the positional electric drive operation based on the interval polynomial formed as a result of the study using computer modeling methods. Analysis of local robustness allows us to estimate the boundaries of asymptotic stability of the system under study under parametric disturbances. Formation of an interval polynomial based on the apparatus of Hermite-Biehler polynomials and computer modeling of the positional electric drive under study in the range of calculated boundaries of parameter variations is an important and urgent task. METHODS. When solving the research problem, methods of mathematical analysis, stability theory and theory of automatic control systems, vector-matrix equations in the form of state spaces and differential equations in operator form, the mathematical apparatus of Hermite-Biehler polynomials, as well as modeling of the dynamics equations of the electric drive under study in a software environment were used MatLab. RESULTS. In this work, the problem of analyzing the local robustness of a positional electric drive is solved and an interval polynomial with lower and upper bounds of the coefficients is obtained that accompanies the characteristic polynomial of the system under research. Based on the results of the analysis, computer modeling was carried out and quantitative estimates of the quality indicators of the functioning of the electric drive under research were obtained in the time and frequency domains. Graphs of additional motion are presented, which allow, when forming control objects of this class with sensors and coordinate controllers, to carry out a comparative analysis of the configuration of the system under research for the potential stability of performance indicators under conditions of parametric disturbances. CONCLUSION. The research of the system properties of a positional electric drive according to the output coordinate of its mathematical model from the point of view of local robustness analysis allows us to evaluate the range of parameter variations according to the degree of achievability of the required indicators of the quality of functioning of the object using the characteristic features of various control algorithms. The results of the analysis provide the opportunity to rationally distribute control resources based on classical algorithms and evaluate the effect of introducing output coordinate controllers into the system under conditions of parametric disturbances. It is also possible to compare options for the formation of correction algorithms using classical methods with an adaptive approach of search or analytical (non-search) types, based on the use of reference models of the research object with identification or direct types of control.

**Keywords:** local robustness; characteristic polynomial; positional electric drive; stability; quality of operation; uncertainty; parametric disturbances.

**For citation:** Malev N.A. Analysis of local robustness of a positional electric drive using Hermite-Biehler polynomials. *Power engineering: research, equipment, technology*. 2025; 27 (5): 67-85. doi: 10.30724/1998-9903-2025-27-5-67-85.

**Введение (Introduction)**

Классические методы анализа и синтеза систем управления электроприводов базируются на предположении, что математические модели объектов исследования с необходимой и достаточной точностью описывают реальное поведение объектов [1, 2], не допускают структурных изменений в процессе функционирования, а параметры моделей стационарны и не подвержены флуктуациям [3, 4]. На практике электроприводы являются объектами, работающими в условиях влияния различных дестабилизирующих воздействий [5, 6], вызванных, в том числе, нестабильностью параметров в процессе эксплуатации [7-9]. В данном случае речь идет о параметрической неопределенности математической модели объекта [10-12], которая может существенно отличаться от номинальной или эталонной модели, положенной в основу формирования алгоритма управления с применением классических методов синтеза [13-15]. Параметрическая неопределенность предполагает изменение системных параметров математических моделей, таких как коэффициенты полиномов числителей и знаменателей передаточных функций или коэффициентов матриц состояния, входа и выхода объектов исследования [16, 17]. Другие виды неопределенностей, такие как сигнальная, вызванная воздействием на объект заранее неизвестного возмущения экзогенного или эндогенного происхождения, функциональная, при наличии которой математическая модель объекта содержит неизвестные функциональные зависимости переменных состояния, регулируемых координат или сигналов управления и структурная, когда структура математической модели объекта известна неточно и является причиной возникновения паразитной динамики, – все перечисленные виды неопределенностей могут быть сведены к параметрической неопределенности, которая учитывает как априорные, так и текущие вариации параметров математической модели [18-20].

Приведенные выше соображения наряду с гипотезой о возможности рассмотрения сигнальной, функциональной и структурной неопределенностей как параметрической позволяют рассматривать управляемый позиционный электропривод как объект с параметрической неопределенностью [21, 22]. В итоге возникает задача аналитического определения вариаций нестабильных параметров относительно их номинальных (эталонных) значений. Результаты решения данной задачи, в зависимости от особенностей их применения, могут быть представлены в абсолютных или относительных единицах в аддитивной или мультипликативной форме [23, 24]. Целью данного исследования является определение показателей качества динамических процессов регулируемого позиционного электропривода, функционирующего в условиях параметрической неопределенности на основе анализа локальной робастности, т.е. аналитической оценки вариаций параметров математической модели объекта исследования с применением аппарата полиномов Эрмита-Билера. Научная значимость исследования состоит в определении прямоугольного гиперпараллелепипеда в пространстве нестабильных параметров при произвольной параметрической неопределенности в условиях сохранения асимптотической устойчивости системы. Практическая значимость исследования заключается в формировании алгоритма вычисления интервального полинома, сопровождающего характеристический полином эталонной модели объекта, с определением верхнего и нижнего диапазонов изменений параметров в рамках устойчивого решения уравнений динамики с возможностью автоматизированной реализации указанного алгоритма.

**Материалы и методы (Materials and methods)**

Рассмотрим объект исследования, позиционный следящий электропривод, представленный линейной стационарной системой вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

с характеристическим многочленом

$$\det[\mathbf{Es} - \mathbf{A}] = D(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i} = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющим критерию Рауса-Гурвица, т.е. полюсами  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i = \overline{1, n})$  [25-27].

Решим задачу определения интервального многочлена

$$D_{\text{int}}(s) = s^n + \sum_{i=1}^n [\underline{a}_i, \overline{a}_i] s^{n-i}, \quad (2)$$

сопровождающего характеристический полином (1), с верхней  $\overline{a}_i$  и нижней  $\underline{a}_i$  границами коэффициентов, удовлетворяющих неравенствам

$$\underline{a}_i < a_i < \overline{a}_i \quad (i = 1, n). \quad (3)$$

Поставленную задачу будем решать с применением полиномов Эрмита-Билера [28], позволяющих представить характеристический полином  $D(s)$  суммой

$$D(s) = G(a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots) + sH(a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots).$$

Полиномы Эрмита-Билера  $G$  и  $H$  определяются выражениями

$$G(a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots) = a_n + a_{n-2}s^2 + a_{n-4}s^4 + \dots = G(l) = a_1^{n-2[n/2]} \varphi_G(l),$$

$$\varphi_G(l) = \prod_{i=1}^{[n/2]} (l - \mu_i) = 0, \quad l = s^2;$$

$$H(a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots) = a_{n-1} + a_{n-3}s^3 + a_{n-5}s^5 + \dots = H(l) = a_1^{n-1-2[(n-1)/2]} \varphi_H(l),$$

$$\varphi_H(l) = \prod_{i=1}^{[(n-1)/2]} (l - \eta_i) = 0.$$

Здесь  $\varphi_G(l)$ ,  $\varphi_H(l)$  – приведенные многочлены полиномов Эрмита-Билера  $G$  и  $H$ , а квадратные скобки означают операцию взятия целой части действительного числа.

Если характеристический полином  $D(s)$  имеет устойчивое решение, то при условии  $a_1 > 0$ , корни приведенных многочленов Эрмита-Билера  $\varphi_G(l)$ ,  $\varphi_H(l)$  отрицательны, вещественны и перемежаются, удовлетворяя неравенствам

$$0 > \mu_1 > \eta_1 > \mu_2 > \eta_2 > \dots > \mu_i > \eta_i > \dots \quad (4)$$

Устойчивое решение интервального полинома  $D_{\text{int}}(s)$  означает, что устойчивыми будут решения следующих четырех полиномов, составленных из верхних и нижних граничных значений коэффициентов интервального полинома (2):

$$\begin{aligned} D_1(s) &= G_1(\overline{a_n}, \underline{a_{n-2}}, \overline{a_{n-4}}, \dots) + sH_1(\overline{a_{n-1}}, \underline{a_{n-3}}, \overline{a_{n-5}}, \dots), \\ D_2(s) &= G_1(\overline{a_n}, \underline{a_{n-2}}, \overline{a_{n-4}}, \dots) + sH_2(\underline{a_{n-1}}, \overline{a_{n-3}}, \underline{a_{n-5}}, \dots), \\ D_3(s) &= G_2(\underline{a_n}, \overline{a_{n-2}}, \underline{a_{n-4}}, \dots) + sH_2(\underline{a_{n-1}}, \overline{a_{n-3}}, \underline{a_{n-5}}, \dots), \\ D_4(s) &= G_2(\underline{a_n}, \overline{a_{n-2}}, \underline{a_{n-4}}, \dots) + sH_1(\overline{a_{n-1}}, \underline{a_{n-3}}, \overline{a_{n-5}}, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Если приведенные многочлены  $\varphi_G(l)$ ,  $\varphi_H(l)$  полиномов Эрмита-Билера  $G$  и  $H$ , фигурирующих в (5), представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{G_1}(l) &= l^m + \overline{\beta_1^G} l^{m-1} + \underline{\beta_2^G} l^{m-2} + \overline{\beta_3^G} l^{m-3} + \underline{\beta_4^G} l^{m-4} + \dots, \quad m = \left[ \frac{n}{2} \right], \\ \Phi_{G_2}(l) &= l^m + \underline{\beta_1^G} l^{m-1} + \overline{\beta_2^G} l^{m-2} + \underline{\beta_3^G} l^{m-3} + \overline{\beta_4^G} l^{m-4} + \dots, \\ \Phi_{H_1}(l) &= l^k + \overline{\beta_1^H} l^{k-1} + \underline{\beta_2^H} l^{k-2} + \overline{\beta_3^H} l^{k-3} + \underline{\beta_4^H} l^{k-4} + \dots, \quad k = \left[ \frac{n-1}{2} \right], \\ \Phi_{H_2}(l) &= l^k + \underline{\beta_1^H} l^{k-1} + \overline{\beta_2^H} l^{k-2} + \underline{\beta_3^H} l^{k-3} + \overline{\beta_4^H} l^{k-4} + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

то устойчивость решения интервального полинома означает, что для всех  $i, j = 1, 2$  полиномы  $G_i, H_j$ , определяемые выражениями:

при нечетном  $n$

$$G_1(l) = \underline{a}_1 \Phi_{G_1}(l), \quad G_2(l) = \overline{a}_1 \Phi_{G_2}(l),$$

$$H_1(l) = \Phi_{H_1}(l), \quad H_2(l) = \Phi_{H_2}(l),$$

при четном  $n$

$$G_1(l) = \Phi_{G_1}(l), \quad G_2(l) = \Phi_{G_2}(l),$$

$$H_1(l) = \underline{a}_1 \Phi_{H_1}(l), \quad H_2(l) = \overline{a}_1 \Phi_{H_2}(l),$$

составляют положительные пары  $[G_i, H_j]$ .

Пары полиномов  $[\Phi_{G_1}, \Phi_{G_2}], [\Phi_{H_1}, \Phi_{H_2}]$ , сопровождающих многочлены  $\varphi_G(l), \varphi_H(l)$ , верхняя и нижняя границы которых чередуются при условии выполнения неравенств

$$\underline{\beta}_i^G < \beta_i^G < \overline{\beta}_i^G \quad (i = \overline{1, m}), \quad \underline{\beta}_i^H < \beta_i^H < \overline{\beta}_i^H \quad (i = \overline{1, k}), \quad (8)$$

называются парами Лобачевского [29, 30].

При заданном характеристическом полиноме  $D(s)$  (1), удовлетворяющем критерию Руиса-Гурвица, можно вычислить корни соответствующей ему положительной пары многочленов Эрмита-Билера  $\varphi_G(l), \varphi_H(l)$  и, с учетом выполнения неравенств (4), разбить отрицательную полуось оси вещественных чисел комплексной плоскости корней на непересекающиеся вариации возможных изменений корней положительных пар полиномов  $\Phi_{G_i}, \Phi_{H_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ) в соответствии с неравенством

$$\begin{aligned} 0 &> \overline{\mu}_1 > \underline{\mu}_1 > \overline{\eta}_1 > \underline{\eta}_1 > \dots \\ &\dots > \overline{\mu}_i > \underline{\mu}_i > \overline{\eta}_j > \underline{\eta}_j > \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\overline{\mu}_i, \underline{\mu}_i, \overline{\eta}_j, \underline{\eta}_j$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$ ) – отрицательные действительные числа, корни положительных пар полиномов  $\Phi_{G_i}, \Phi_{H_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ).

Связь корней приведенных многочленов  $\varphi_G(l), \varphi_H(l)$  с коэффициентами полиномов  $[\Phi_{G_i}, \Phi_{H_j}]$  ( $i, j = 1, 2$ ) определяется выражениями

$$\begin{aligned} \Phi_{G_1}(l) &= (l - \underline{\mu}_m)(l - \overline{\mu}_{m-1})(l - \underline{\mu}_{m-2})(l - \overline{\mu}_{m-3})\dots, \\ \Phi_{G_2}(l) &= (l - \overline{\mu}_m)(l - \underline{\mu}_{m-1})(l - \overline{\mu}_{m-2})(l - \underline{\mu}_{m-3})\dots, \\ \Phi_{H_1}(l) &= (l - \underline{\eta}_k)(l - \overline{\eta}_{k-1})(l - \underline{\eta}_{k-2})(l - \overline{\eta}_{k-3})\dots, \\ \Phi_{H_2}(l) &= (l - \overline{\eta}_k)(l - \underline{\eta}_{k-1})(l - \overline{\eta}_{k-2})(l - \underline{\eta}_{k-3})\dots. \end{aligned}$$

Таким образом, алгоритм определения интервального полинома  $D_{\text{int}}(s)$ , сопровождающего характеристический полином  $D(s)$  устойчивой замкнутой системы может быть представлен следующей последовательностью действий:

1) формирование полиномов Эрмита-Билера  $G$  и  $H$ , сопровождающих заданный характеристический полином  $D(s)$  устойчивой замкнутой системы;

2) формирование приведенных многочленов Эрмита-Билера  $\varphi_G(l), \varphi_H(l)$ , сопровождающих полиномы  $G$  и  $H$ ;

3) определение корней приведенных многочленов Эрмита-Билера  $\varphi_G(l), \varphi_H(l)$ ;

4) разбиение отрицательной полуоси оси вещественных чисел комплексной плоскости на непересекающиеся интервалы возможных вариаций корней, определенных в п.3, в соответствии с неравенством (9), с учетом выполнения условия, что восстановленные по границам этих корней положительные пары полиномов  $\Phi_{G_i}, \Phi_{H_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ), сопровождающие приведенные многочлены Эрмита-Билера  $\varphi_G(l), \varphi_H(l)$ , составляли пары Лобачевского, удовлетворяющие неравенствам (8);

5) выбор верхней и нижней границ коэффициента  $a_1$  в соответствии с условиями, следующими из (7):

при нечетном  $n$

$$\underline{a}_1 < \min \left[ a_1, \frac{a_5}{\underline{\beta}_2^G}, \frac{a_9}{\underline{\beta}_4^G}, \frac{a_{13}}{\underline{\beta}_6^G}, \dots \right], \quad \underline{a}_1 > \max \left[ \frac{a_3}{\underline{\beta}_1^G}, \frac{a_7}{\underline{\beta}_3^G}, \frac{a_{11}}{\underline{\beta}_5^G}, \frac{a_{15}}{\underline{\beta}_7^G}, \dots \right],$$

$$\overline{a}_1 > \left[ a_1, \frac{a_5}{\underline{\beta}_2^G}, \frac{a_9}{\underline{\beta}_4^G}, \frac{a_{13}}{\underline{\beta}_4^G}, \dots \right], \quad \underline{a}_1 > \left[ \frac{a_3}{\underline{\beta}_1^G}, \frac{a_7}{\underline{\beta}_3^G}, \frac{a_{11}}{\underline{\beta}_5^G}, \frac{a_{15}}{\underline{\beta}_7^G}, \dots \right];$$

при четном  $n$

$$\underline{a}_1 < \min \left[ a_1, \frac{a_5}{\underline{\beta}_2^H}, \frac{a_9}{\underline{\beta}_4^H}, \frac{a_{13}}{\underline{\beta}_6^H}, \dots \right], \quad \underline{a}_1 > \max \left[ \frac{a_3}{\underline{\beta}_1^H}, \frac{a_7}{\underline{\beta}_3^H}, \frac{a_{11}}{\underline{\beta}_5^H}, \frac{a_{15}}{\underline{\beta}_7^H}, \dots \right],$$

$$\overline{a}_1 > \left[ a_1, \frac{a_5}{\underline{\beta}_2^H}, \frac{a_9}{\underline{\beta}_4^H}, \frac{a_{13}}{\underline{\beta}_4^H}, \dots \right], \quad \underline{a}_1 > \left[ \frac{a_3}{\underline{\beta}_1^H}, \frac{a_7}{\underline{\beta}_3^H}, \frac{a_{11}}{\underline{\beta}_5^H}, \frac{a_{15}}{\underline{\beta}_7^H}, \dots \right];$$
(10)

6) формирование интервального полинома (2), соответствующего выражениям (7).

Рассмотрим подробнее выполнение п. 4, исходя из условия, что восстановленные по непересекающимся интервалам возможных вариаций корней многочленов Эрмита-Билера  $\varphi_G(l)$ ,  $\varphi_H(l)$  полиномы  $\Phi_{G_i}, \Phi_{H_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ) составляют пары Лобачевского.

В соответствии с формулами Виета связь коэффициентов  $a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) характеристического полинома  $D(s)$  с его корнями  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) может быть представлена в виде

$$a_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_{n-1} - \lambda_n = -\sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$a_2 = \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n) + \lambda_2 (\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n) + \dots + \lambda_{n-2} (\lambda_{n-1} + \lambda_n) + \lambda_{n-1} \lambda_n = \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=2 \\ i_1 < i_2}}^n \lambda_{i_1} \lambda_{i_2},$$

$$a_3 = -\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n) - \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_4 + \lambda_5 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n) - \dots - \lambda_1 \lambda_{n-1} \lambda_n - \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_4 + \lambda_5 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n) - \dots - \lambda_2 \lambda_{n-1} \lambda_n - \dots - \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n = \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=2 \\ i_3=3 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^n \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3},$$

.....

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \lambda_{n-2} (\lambda_{n-1} + \lambda_n) + \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \lambda_{n-1} \lambda_n + \dots + \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n-1} \lambda_n] =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=2 \\ \dots \\ i_{n-1}=n-1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}}}^n \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}},$$

$$a_n = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Введем обозначения  $\mathbf{a} = \text{col}[a_1, \dots, a_n]$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{col}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  и запишем приведенные выше формулы в векторно-матричной форме в двух вариантах:

1) левая верхне-треугольная форма:

$$\mathbf{a} = W_1(\lambda_2, \dots, \lambda_n) x,$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \dots & w_{2,n-1} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n-1,1} & w_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ w_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$w_{ij} = (-1)^i \sum_{\substack{i_1=2 \\ \dots \\ i_{i-1}=i \\ i_1 < \dots < i_{i-1}}}^{n-1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$w_{n,1} = (-1)^n \lambda_2 \dots \lambda_n;$$

2) правая верхне-треугольная форма:

$$\mathbf{a} = W_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) x,$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & w'_{22} & w'_{23} & \dots & w'_{2,n-1} & w'_{2,n} \\ 0 & 0 & w'_{33} & \dots & w'_{3,n-1} & w'_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & w'_{n-1,n-1} & w'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & w'_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$w'_{ij} = (-1)^i \sum_{\substack{i_1=1 \\ \dots \\ i_{i-1}=i-1 \\ i_1 < \dots < i_{i-1}}}^{n-1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}; \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$w'_{n,1} = (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}.$$

Анализ выражений (11), (12) позволяет заключить, что матрица  $W_1$  не зависит от корня  $\lambda_1$ , матрица  $W_2$  не зависит от корня  $\lambda_2$  и обе матрицы являются невырожденными в случае отсутствия нулевых корней.

Исследуем особенности применения формул (11), (12) при оценке вариаций корней (1) с учетом неравенства (9). Определим пару Лобачевского, сопровождающую полином  $\Phi_G$  для случая четной степени характеристического полинома  $D(s)$  при условии соблюдения неравенств

$$\underline{\beta}_i^G(\underline{\mu_m}, \underline{\mu_{m-1}}, \underline{\mu_{m-2}}, \underline{\mu_{m-3}}, \dots) < \beta_i^G < \overline{\beta}_i^G(\underline{\mu_m}, \underline{\mu_{m-1}}, \underline{\mu_{m-2}}, \underline{\mu_{m-3}}, \dots) \quad (i = 1, 3, 5, \dots),$$

$$-\underline{\beta}_j^G(\underline{\mu_m}, \underline{\mu_{m-1}}, \underline{\mu_{m-2}}, \underline{\mu_{m-3}}, \dots) < -\beta_j^G < -\overline{\beta}_j^G(\underline{\mu_m}, \underline{\mu_{m-1}}, \underline{\mu_{m-2}}, \underline{\mu_{m-3}}, \dots) \quad (j = 2, 4, 6, \dots).$$

Введем обозначения

$$\mathbf{B}_G = \text{col}[\underline{\beta}_1^G, -\underline{\beta}_2^G, \underline{\beta}_3^G, -\underline{\beta}_4^G, \dots],$$

$$\overline{\mathbf{B}_G} = \text{col}[\overline{\beta}_1^G, -\overline{\beta}_2^G, \overline{\beta}_3^G, -\overline{\beta}_4^G, \dots],$$

$$\underline{\mathbf{B}_G} = \text{col}[\underline{\beta}_1^G, -\underline{\beta}_2^G, \underline{\beta}_3^G, -\underline{\beta}_4^G, \dots],$$

$$\mathbf{M} = \text{col}[\dots, \underline{\mu_{m-3}}, \underline{\mu_{m-2}}, \underline{\mu_{m-1}}, \underline{\mu_m}],$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \text{col}[\dots, \underline{\mu_{m-3}}, \overline{\underline{\mu_{m-2}}}, \underline{\mu_{m-1}}, \overline{\underline{\mu_m}}],$$

$$\underline{\mathbf{M}} = \text{col}[\dots, \overline{\underline{\mu_{m-3}}}, \underline{\mu_{m-2}}, \overline{\underline{\mu_{m-1}}}, \underline{\mu_m}],$$

$$W_1^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -w_{21} & -w_{21} & \dots & -w_{2,n-1} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & \dots & 0 & 0 \\ -w_{41} & -w_{42} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

и перепишем неравенства (13) с учетом выражения (11) в векторно-матричной форме

$$\underline{B}_G = W_1^* \overline{M} < B_G = W_1^* M < \overline{B}_G = W_1^* \underline{M}. \quad (14)$$

Неравенство (14) позволяет при заданном интервале вариаций корней, удовлетворяющих неравенству (9), начиная со второго, найти границы возможных вариаций корня  $\mu_1(\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1)$ , при которых полиномы  $\Phi_{G1}, \Phi_{G2}$  образуют пару Лобачевского.

Следует отметить, что при флюктуации корней  $\mu_j (j = \overline{2, m})$  необходимо учитывать тот факт, что границы возможных вариаций корней  $\eta_i (j = \overline{1, l})$  должны быть такими, чтобы соответствующая этим корням пара полиномов  $\Phi_{H1}, \Phi_{H2}$  была бы парой Лобачевского.

В случае нечетной степени характеристического полинома  $D(s)$  построение пары Лобачевского  $\Phi_{G1}, \Phi_{G2}$  производится согласно процедуре, рассмотренной выше. При определении пары Лобачевского, сопровождающей полином  $\varphi_H$ , должны быть удовлетворены неравенства

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_i^H(\underline{\eta}_k, \underline{\eta}_{k-1}, \underline{\eta}_{k-2}, \underline{\eta}_{k-3}, \dots) &< \beta_i^H < \overline{\beta}_i^H(\overline{\eta}_k, \overline{\eta}_{k-1}, \overline{\eta}_{k-2}, \overline{\eta}_{k-3}, \dots) \quad (i = 1, 3, 5, \dots), \\ -\underline{\beta}_j^H(\underline{\eta}_k, \underline{\eta}_{k-1}, \underline{\eta}_{k-2}, \underline{\eta}_{k-3}, \dots) &< -\beta_j^H < -\overline{\beta}_j^H(\overline{\eta}_k, \overline{\eta}_{k-1}, \overline{\eta}_{k-2}, \overline{\eta}_{k-3}, \dots) \quad (j = 2, 4, 6, \dots). \end{aligned} \quad (15)$$

Введем обозначения

$$B_H = \text{col}[\beta_1^H, -\beta_2^H, \beta_3^H, -\beta_4^H, \dots],$$

$$\overline{B}_H = \text{col}[\overline{\beta}_1^H, -\underline{\beta}_2^H, \overline{\beta}_3^H, -\underline{\beta}_4^H, \dots],$$

$$\underline{B}_H = \text{col}[\underline{\beta}_1^H, -\underline{\beta}_2^H, \underline{\beta}_3^H, -\underline{\beta}_4^H, \dots],$$

$$H = \text{col}[\dots, \underline{\eta}_{k-3}, \eta_{k-2}, \eta_{k-1}, \eta_k],$$

$$\overline{H} = \text{col}[\dots, \underline{\eta}_{k-3}, \overline{\eta}_{k-2}, \eta_{k-1}, \overline{\eta}_k],$$

$$\underline{H} = \text{col}[\dots, \overline{\eta}_{k-3}, \underline{\eta}_{k-2}, \overline{\eta}_{k-1}, \underline{\eta}_k],$$

$$W_2^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -w_{22} & -w_{23} & \dots & -w_{2,l} \\ 0 & 0 & w_{33} & \dots & w_{3,l} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -w_{4,l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений неравенства (15) на основании выражения (11) в векторно-матричной форме можно записать как

$$\underline{B}_H = W_2^* \overline{H} < B_H = W_2^* H < \overline{B}_H = W_2^* \underline{H}. \quad (16)$$

Неравенство (16) позволяет при заданном интервале вариаций корней, удовлетворяющих неравенству (9), найти границы возможных вариаций корня  $\eta_k(\underline{\eta}_k, \overline{\eta}_k)$ , при которых полиномы  $\Phi_{H1}, \Phi_{H2}$  образуют пару Лобачевского.

Следует отметить, что при флюктуации корней  $\eta_i (i = \overline{1, l-1})$  необходимо учитывать тот факт, что границы возможных вариаций корней  $\mu_j (j = \overline{1, m})$  должны быть такими, чтобы соответствующая этим корням пара полиномов  $\Phi_{G1}, \Phi_{G2}$  была бы парой Лобачевского.

### Результаты (Results)

В качестве объекта исследования рассмотрим позиционный следящий электропривод с двигателем постоянного тока типа 4ПБ112М2Г [15, 17] и главной отрицательной обратной связью по углу с ПИ-регулятором углового перемещения.

К параметрам динамической модели электропривода относятся следующие величины:  $k_{pp} = 2$  – коэффициент передачи регулятора углового перемещения;  $T_{pp} = 20$  с – постоянная времени регулятора углового перемещения;  $k_{\pi} = 10$  – коэффициент передачи

управляемого преобразователя;  $T_{\Pi} = 0,002$  с – постоянная времени управляемого преобразователя;  $T_3 = 0,0075$  с – электромагнитная постоянная времени якорной цепи;  $T_M = 0,05$  с – электромеханическая постоянная времени;  $k_{dB} = 1,5083$  В·с/рад – коэффициент передачи двигателя;  $k_p = 0,1$  – коэффициент передачи редуктора;  $k_{dp} = 6$  В/рад – коэффициент передачи датчика углового перемещения.

С учетом приведенных величин характеристический полином вида (1) для замкнутой системы запишется как

$$D(s) = s^5 + \frac{T_3 T_M T_{\Pi} T_{dp}}{T_3 T_M T_{\Pi} T_{pp}} s^4 + \frac{T_M T_{pp} + T_{\Pi} T_{dp}}{T_3 T_M T_{\Pi} T_{pp}} s^3 + \frac{1}{T_3 T_M T_{\Pi}} s^2 + \frac{k_{pp} k_{\Pi} k_{dB} k_p k_{dp}}{T_3 T_M T_{\Pi}} s + \frac{k_{\Pi} k_{dB} k_p k_{dp}}{T_3 T_M T_{\Pi} T_{pp}}. \quad (17)$$

Решим задачу определения интервального полинома вида (2), сопровождающего характеристический полином (17), с верхней  $\bar{a}_i$  и нижней  $\underline{a}_i$  границами коэффициентов

Подставляя в (17) числовые значения, получим

$$D(s) = s^5 + 633,3333s^4 + 69333,3333s^3 + 1,3333 \cdot 10^6 s^2 + 2,41328 \cdot 10^7 s + 603320. \quad (18)$$

Представим характеристический полином (18) в виде полиномов Эрмита-Билера

$$\begin{aligned} D(s) &= G(s) + sH(s), \\ G(s) &= 633,3333s^4 + 1,3333 \cdot 10^6 s^2 + 603320 = a_1 \varphi_G(l) = \\ &= l^2 + 69333,3333l + 38100 = 633,3333(l + 0,4526)(l + 2104,5473); \\ H(s) &= s^4 + 69333,3333s^2 + 38100 = \varphi_H(l) = \\ &= l^2 + 69333,3333l + 38100 = (l + 0,5495)(l + 69332,7838). \end{aligned}$$

Из полученных результатов видно, что исходный характеристический полином соответствует критерию Рауса-Гурвица, поскольку сопровождающие его полиномы Эрмита-Билера составляют положительную пару:

$$0 > [\underline{\mu}_1 = -0,4526] > [\underline{\eta}_1 = -0,5495] > [\underline{\mu}_2 = -2104,5473] > [\underline{\eta}_2 = -69332,7838].$$

Запишем сопровождающую полином  $\varphi_G$  пару Лобачевского

$$\begin{aligned} \Phi_{G1}(l) &= (l - \underline{\mu}_2)(l - \bar{\mu}_1) = l^2 + \bar{\beta}_1^G l + \underline{\beta}_2^G, \\ \Phi_{G2}(l) &= (l - \bar{\mu}_2)(l - \underline{\mu}_1) = l^2 + \underline{\beta}_1^G + \bar{\beta}_2^G, \end{aligned}$$

где  $0 > \bar{\mu}_1 > -0,4526 > \underline{\mu}_1 > -0,5495 > \bar{\mu}_2 > -2104,5473 > \underline{\mu}_2 > -69332,7838$ .

Примем  $\underline{\mu}_2 = -60000$ ,  $\bar{\mu}_2 = -2000$  и сформируем неравенство (14)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1^G \\ -\bar{\beta}_2^G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -w_{21}(\bar{\mu}_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ -2000 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1^G \\ -\underline{\beta}_2^G \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -w_{21}(\underline{\mu}_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2104,5473 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,4526 \\ -2104,5473 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2105 \\ -952,5181 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1^G \\ -\underline{\beta}_2^G \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -w_{21}(\underline{\mu}_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 60000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ -60000 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$-\underline{\mu}_1 + 2000 < 2105 < -\bar{\mu}_1 + 60000;$$

$$2000\underline{\mu}_1 < -952,5181 < 60000\bar{\mu}_1,$$

или, что то же самое,

$$57895 > \bar{\mu}_1 > \frac{-952,5181}{60000} = -0,0159;$$

$$-105 < \underline{\mu}_1 < \frac{-952,5181}{2000} = -0,4763.$$

Полученные неравенства позволяют принять верхнюю и нижнюю границы  $\underline{\mu}_1 = -0,015; \underline{\mu}_1 = -100$  и определить искомые коэффициенты пары Лобачевского:

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}_1^G \\ \underline{\beta}_2^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100 \\ -2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2100 \\ -200000 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\beta}_1^G \\ \overline{\beta}_2^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -60000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,015 \\ -60000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60000,015 \\ -900 \end{bmatrix},$$

т.е.  $\overline{\beta}_1^G = 60000,015; \underline{\beta}_1^G = 2100; \overline{\beta}_2^G = 200000; \underline{\beta}_2^G = 900$ .

Поскольку рассматриваемый характеристический полином (18) имеет нечетную степень, для определения пар Лобачевского  $\Phi_{H_1}, \Phi_{H_2}$  воспользуемся соотношением (16). Значения флюктуаций корней полинома  $\Phi_H$  примем близкими к соответствующим значениям корней  $\mu_i$  с точностью до 0,001 согласно интервалу «неулучшаемости» интервального полинома:  $\overline{\eta}_1 = -100,001; \underline{\eta}_1 = 2099,999; \overline{\eta}_2 = -60000,001$ . Тогда для рассматриваемого случая неравенство (16) запишется как

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}_1^H \\ \underline{\beta}_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -w'_{22}(\underline{\eta}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\eta}_1 \\ \underline{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 60000,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2099,999 \\ \underline{\eta}_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1^H \\ \underline{\beta}_2^H \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -w'_{22}(\underline{\eta}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0,5495 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5495 \\ -69332,7838 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69333,3333 \\ -38098,3647 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \overline{\beta}_1^H \\ \overline{\beta}_2^H \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -w'_{22}(\overline{\eta}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 100,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100,001 \\ \eta_2 \end{bmatrix}.$$

Из полученного соотношения следует, что

$$2099,999 - \underline{\eta}_2 < 69333,3333 < 100,001 - \underline{\eta}_2;$$

$$2099,999 \overline{\eta}_2 < -38098,3647 < 100,001 \underline{\eta}_2,$$

или, что то же самое,

$$-67233,3343 < \underline{\eta}_2 < \frac{-38098,3647}{2099,999} = -18,1421$$

$$69233,3323 > \underline{\eta}_2 > \frac{-38098,3647}{100,001} = -380,9836.$$

Полученные неравенства позволяют принять верхнюю и нижнюю границы  $\overline{\eta}_2 = -18; \underline{\eta}_2 = -300$  и определить искомые коэффициенты пары Лобачевского:

$$\begin{bmatrix} \underline{\beta}_1^H \\ \underline{\beta}_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 60000,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2099,999 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2117,999 \\ -1080000,018 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \overline{\beta}_1^H \\ \overline{\beta}_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 100,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -100,001 \\ -300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400,001 \\ -30000,3 \end{bmatrix},$$

т.е.  $\overline{\beta}_1^H = 400,001; \underline{\beta}_1^H = 2117,999; \overline{\beta}_2^H = 1080000,018; \underline{\beta}_2^H = 30000,3$ .

Далее в соответствии с (10) для нечетного  $n$  определим границы коэффициента  $a_1$ :

$$\underline{a}_1 < \min \left[ a_1, \frac{a_5}{\underline{\beta}_2^G} \right] = \left[ 633,3333, \frac{603320}{900} = 670,3555 \right] = 633,3333,$$

$$\underline{a}_1 > \frac{a_3}{\underline{\beta}_1^G} = \frac{1333300}{60000,015} = 22,2217,$$

$$\overline{a}_1 > \max \left[ a_1, \frac{a_5}{\overline{\beta}_2^G} \right] = \left[ 633,3333, \frac{603320}{200000} = 3,0166 \right] = 633,3333,$$

$$\overline{a}_1 < \frac{a_3}{\overline{\beta}_1^G} = \frac{1333300}{2100} = 634,9048.$$

Принимаем  $\underline{a}_1 = 22,23$ ;  $\overline{a}_1 = 634$ . Окончательно искомый интервальный полином запишется как

$$D_{\text{int}}(s) = s^5 + [22,23; 634]s^4 + [8892,0222; 253600,634]s^3 + [46683; 38040009,51]s^2 + [666906,669; 684720011,412]s + [180063; 44446000]. \quad (19)$$

#### Обсуждение (Discussions)

Проведем моделирование исследуемого позиционного электропривода по уравнению (18) с учетом полученного интервального полинома (19) по верхней и нижней границам диапазона вариаций параметров с получением временных и частотных зависимостей. Соответствующие графики переходных и логарифмических частотных характеристик, полученные автором в результате моделирования в программной среде MatLab с помощью приведенного ниже скрипта (рис. 1), представлены на рисунках 2 и 3.

```
Command Window
>> num1=[2.41328e7 603320.0];
den1=[1 633.33333333333333 69333.33333333333333 1.3333333333333333e6 2.41328e7 603320];
Qnom=tf(num1, den1); % номинальная модель
num2=[666906.669 180063];
den2=[1 22.23 8892.0222 46683 666906.669 180063];
Qlow=tf(num2, den2); % интервальный полином с нижней границей параметров
num3=[684720011.412 44446000];
den3=[1 634 253600.634 38040009.51 684720011.412 44446000];
Qup=tf(num3, den3); % интервальный полином с верхней границей параметров
```

Рис. 1. Скрипт для задания параметров моделей позиционного электропривода Fig. 1. Script for setting parameters of positional electric drive models

\*Источник: Составлено авторами Source: compiled by the author.

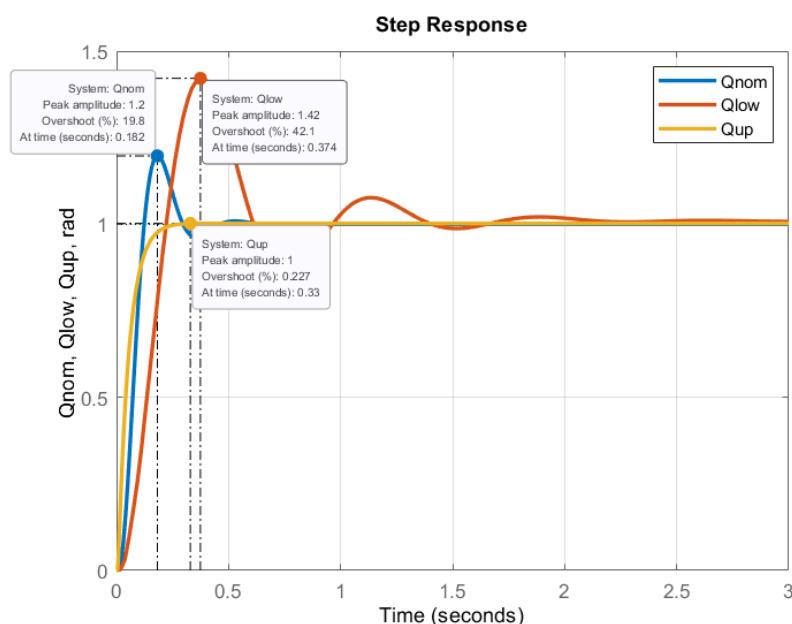


Рис. 2. Переходные характеристики позиционного электропривода Fig. 2. Step response of a positional electric drive

\*Источник: Составлено авторами Source: compiled by the author.

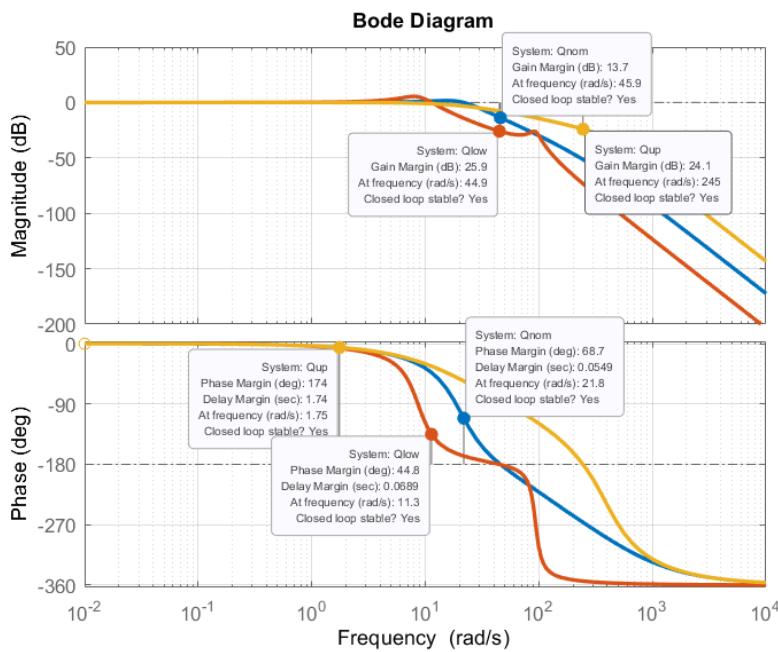


Рис. 3. Логарифмические частотные характеристики позиционного электропривода  
Fig. 3. Bode diagrams of a positional electric drive

\*Источник: Составлено авторами Source: compiled by the author.

Из анализа характеристик, показанных на рисунке 2 видно, что переходный процесс выходной регулируемой координаты, угла перемещения исполнительного вала электропривода  $\theta_{nom}(t)$ , при номинальных значениях параметров характеризуется перерегулированием 19,8%, временем нарастания 0,08 с и временем установления 0,414 с. На графиках угол перемещения  $\theta(t)$  обозначен буквой  $Q$ , поскольку в среде MatLab греческие буквы представляют недопустимые текстовые символы, а индексы *up* и *low* означают соответственно верхнюю и нижнюю границы интервального полинома.

На переходной характеристике электропривода с параметрами, соответствующими нижней границе значений  $\theta_{low}(t)$  перерегулирование возрастает до 42,1%, время нарастания – до 0,146 с, а время установления составляет 1,94 с, т.е. колебательность увеличилась в 2 раза, а длительность переходного процесса – более, чем в 4 раза, что свидетельствует об ухудшении показателей качества.

Переходный процесс  $\theta_{up}(t)$ , соответствующий верхней границе значений параметров электропривода, можно считать апериодическим с перерегулированием, близким к нулю и существенно меньшим временем установления, около 0,19 с; при этом время нарастания, равное 0,105 с, незначительно отличается от соответствующего показателя при номинальных значениях параметров.

Логарифмические частотные характеристики, показанные на рисунке 3, позволяют оценить запасы устойчивости по фазе  $\varphi_3(\omega)$  и амплитуде  $L_3(\omega)$ . Так, запасы по фазе  $\varphi_3^{nom}(\omega) = 68,7$  град;  $\varphi_3^{low}(\omega) = 44,8$  град;  $\varphi_3^{up}(\omega) = 174$  град, запасы по амплитуде  $L_3^{nom}(\omega) = 13,7$  дБ;  $L_3^{low}(\omega) = 25,9$  дБ;  $L_3^{up}(\omega) = 24,1$  дБ. К характерным особенностям полученных графиков можно отнести наличие двух резонансных пиков на амплитудно-частотной характеристике  $L_{up}(\omega)$ , что свидетельствует о наличии в составе соответствующего интервального полинома двух колебательных звеньев. Запасы устойчивости по фазе имеют четкую корреляцию с перерегулированием (рис. 1) и меньшее значение  $\varphi_3(\omega)$  соответствует большему перерегулированию. Запасы устойчивости по амплитуде распределились иначе, и минимальное значение соответствует электроприводу с номинальными параметрами, а максимальное – электроприводу с процессом  $\theta_{low}(t)$ . Данный показатель не является определяющим, однако изменение общего коэффициента усиления может привести к неустойчивым решениям.

На рисунке 4 представлены полученные автором графики дополнительного движения (невязки  $\varepsilon(t)$ ) выходной координаты  $\theta(t)$  при вариациях параметров. Соответствующие зависимости определяются разностью  $\varepsilon(t) = \theta_{nom}(t) - \theta_{var}(t)$ , где  $\theta_{var}(t)$  – выходная координата при граничных значениях параметров.

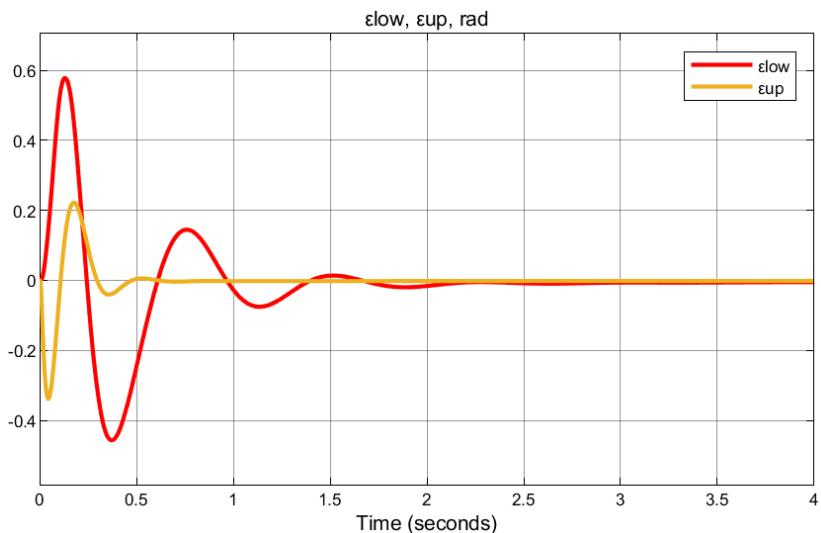


Рис. 4. Графики дополнительного движения (невязки) позиционного электропривода *Fig. 4. Graphs of additional movement (discrepancy) of a positional electric drive*

\*Источник: Составлено авторами *Source: compiled by the author.*

Графики невязки характеризуют отличия временных зависимостей выходных координат  $\theta_{var}(t)$  от эталонного процесса как в динамике, так и в статике. Из анализа рисунка 4 следует, что в установившемся режиме погрешность от вариаций параметров пренебрежимо мала, поскольку по истечении 2 с процессы  $\varepsilon(t)$  устанавливаются около нуля. Оценку динамических погрешностей целесообразно осуществить путем вычисления интеграла от квадрата невязки  $\delta(t) = \int_0^t \varepsilon^2(t) dt$ . Полученные автором графики представлены на рисунке 5.

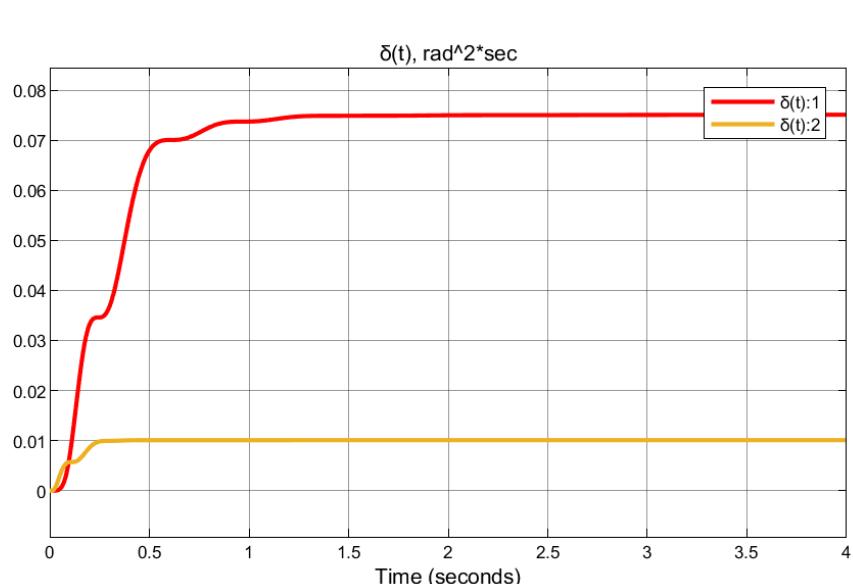


Рис. 5. Графики квадрата невязки позиционного электропривода *Fig. 5. Graphs of the squared discrepancy of a positional electric drive*

\*Источник: Составлено авторами *Source: compiled by the author.*

Из представленных графиков видно, что погрешность  $\delta_{low}(t) = 0,075 \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$  ( $\delta(t):1$  на рисунке 5) значительно больше погрешности  $\delta_{up}(t) = 0,01 \text{ рад}^2 \cdot \text{с}$  ( $\delta(t):2$  на рисунке 5), что является количественным выражением отличий соответствующей переходной характеристики от графика эталонного переходного процесса.

Проведенные расчеты с получением интервального полинома (19) и последующее моделирование исследуемой системы позволяют сделать вывод о том, что в заданном диапазоне вариаций параметров система с последовательным корректирующим устройством является робастно устойчивой.

Кроме того, интерес представляет определение такого сочетания параметров объекта исследования, при котором система окажется на границе устойчивости. Как правило, определяющее влияние на динамическое поведение системы и, в частности, на ее устойчивость оказывают коэффициенты усиления соответствующих элементов, которые могут быть представлены граничным значением общего коэффициента передачи. С учетом известных номинальных значений коэффициентов  $a_i$  характеристического полинома (17) исследуемого объекта при условии их положительности система будет устойчивой при выполнении неравенства

$$(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0. \quad (20)$$

Общий коэффициент передачи  $K$  позиционного электропривода представляет собой произведение соответствующих коэффициентов неизменяемой части системы:

$$K = k_{\text{пп}} k_{\text{дв}} k_{\text{р}} k_{\text{дп}}.$$

Перепишем неравенство (20) с учетом коэффициентов (17) относительно  $K$ , приравняем его к нулю и после некоторых преобразований получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{(T_3 T_{\text{пп}} k_{\text{рп}} - T_3 T_{\text{п}} + T_{\text{пп}} T_{\text{рп}} k_{\text{рп}})^2}{T_3^4 T_{\text{м}}^2 T_{\text{пп}}^4} K^2 - \frac{(T_{\text{м}} + T_{\text{п}})(T_{\text{пп}}^2 + T_{\text{м}} T_{\text{пп}} + T_3 T_{\text{м}})}{T_3^4 T_{\text{м}}^3 T_{\text{пп}}^4} K + \\ & + \frac{(T_{\text{м}} + T_{\text{п}})(T_{\text{пп}}^2 + T_{\text{м}} T_{\text{пп}} + T_3 T_{\text{м}})}{T_3^4 T_{\text{м}}^3 T_{\text{пп}}^4} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Корни уравнения (21) вещественные и равны  $K_1 = 1,1408$ ;  $K_2 = -1,2098$ . Поскольку коэффициенты передачи не могут быть отрицательными, искомое решение соответствует корню  $K_1$ . Результаты данного решения коррелируют с полученными выше частотными и временными зависимостями, из которых видно, что ухудшение прямых показателей качества переходных процессов и снижение запасов устойчивости наблюдается при уменьшении коэффициентов характеристического уравнения (17) и, в том числе, общего коэффициента передачи системы. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что математическая модель исследуемой системы допускает в теории неограниченное повышение общего коэффициента передачи, что говорит о высокой степени робастности и возможности получения хороших точностных показателей позиционного электропривода.

Детальный анализ влияния полюсов уравнения (17) на динамические процессы объекта исследования при бесконечных пределах изменения общего коэффициента передачи позволяет получить метод корневого годографа. Поскольку исследуемая система относится к классу *SISO*-систем (один вход – один выход) для применения метода корневого годографа целесообразно использовать оператор *rlocus* программной среды *MatLab*. Запишем скрипт с использованием указанного оператора (рис. 6) и проведем соответствующий анализ.

```
Command Window
>> sys=tf([2.41328e7 603320.0],[1 633.33333333333333 69333.333333333333 1.3333333333333333e6 2.41328e7 603320]);
>> [r,k] = rlocus(sys)
```

Рис. 6. Скрипт для построения корневого *Fig. 6. Script for plotting a root hodograph* годографа

\*Источник: Составлено авторами *Source: compiled by the author.*

На рисунке 6  $r$  представляет собой массив полюсов размерностью  $5 \times 56$  при  $K = \overline{0, \infty}$ , а, собственно,  $k$  – это общий коэффициент передачи, представленный вектором из 56 значений в указанном диапазоне изменения. Результаты моделирования в силу чрезмерно большого объема информации в работе не приводятся.

Оператор *rlocus* позволяет также получить графическое представление корневого годографа на комплексной  $s$ -плоскости нулей и полюсов исследуемой замкнутой системы. Соответствующие зависимости, полученные автором, представлены на рисунке 7.

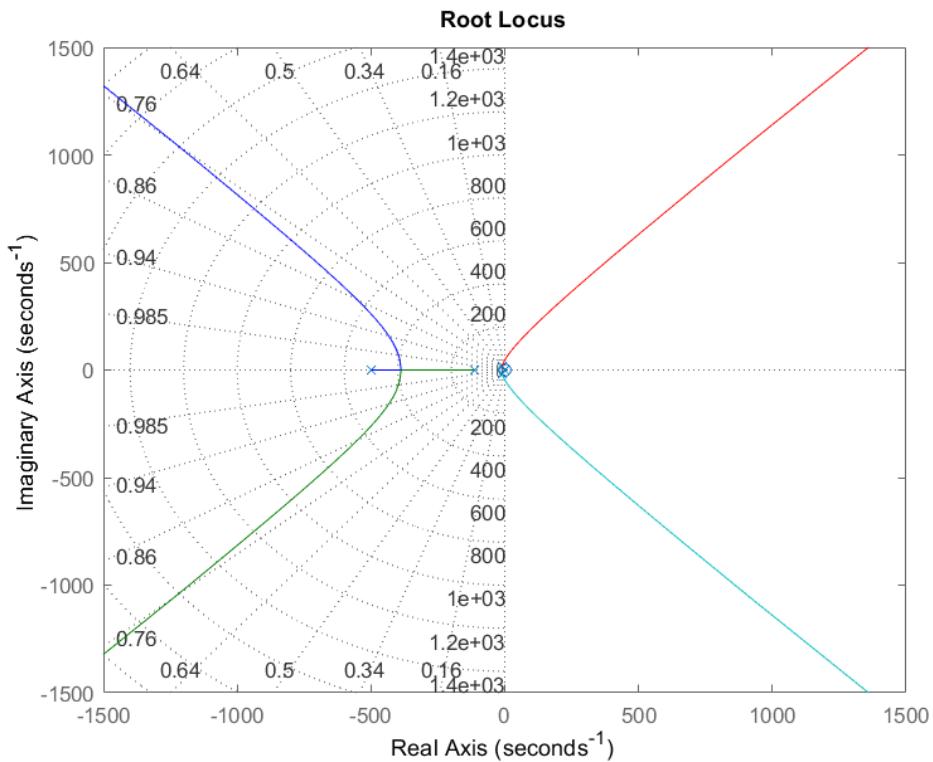


Рис. 7. Корневой годограф позиционного электропривода *Fig. 7. Root locus of a positional electric drive*

\*Источник: Составлено авторами *Source: compiled by the author.*

Годограф начинается в точках, соответствующих нулевому значению общего коэффициента передачи со следующими значениями полюсов, показанных на рисунке 7 крестиками (рис. 8).

```

-4.997400708294452e+02 + 0.000000000000000e+00i
-1.148659536274685e+02 + 0.000000000000000e+00i
-9.351137147369521e+00 + 1.823142081064976e+01i
-9.351137147369521e+00 - 1.823142081064976e+01i
-2.503458168081735e-02 + 0.000000000000000e+00i

```

Рис. 8. Точки, соответствующие нулевому значению общего коэффициента передачи *Fig. 8. Points corresponding to zero value of overall transmission coefficient*

\*Источник: Составлено авторами *Source: compiled by the author.*

Два первых корня  $s_1 = -499,74$ ;  $s_2 = -114,866$  вещественные и по мере увеличения  $K$  трансформируются в пару комплексно-сопряженных корней с удаляющимися от границы устойчивости в отрицательную область действительными и мнимыми частями. Пятый полюс  $s_5 = -0,025$  также является вещественным и при  $K \rightarrow \infty$  стремится к соответствующему нулю  $s_0 = -0,025$ , обозначенному на рисунке 5 кружком. Третий и четвертый корни представлены комплексно-сопряженной парой  $s_{3,4} = -9,3511 \pm j18,2314$  и при увеличении  $K$  траектория указанных корней стремится в правую полуплоскость, что соответствует неустойчивому состоянию системы. Граница устойчивости отвечает частоте  $\omega_\pi = 45,9$  рад/с (синие графики на рисунке 2) и общему коэффициенту передачи  $K = 4,87$ . Отличие от граничного значения коэффициента передачи, вычисленного с помощью выражения (21) вызвано в данном случае учетом параметров ПИ-регулятора углового перемещения, которые при использовании критерия Рауса-Гурвица вошли в (21) в качестве постоянных коэффициентов.

Таким образом, проведенный анализ позиционного электропривода с двигателем

постоянного тока и последовательным корректирующим устройством в виде ПИ-регулятора углового перемещения позволил на основе применения аппарата полиномов Эрмита-Билера выявить допустимый диапазон вариаций параметров, обеспечивающий робастную устойчивость функционирования исследуемого объекта. Также были определены граничные значения общего коэффициента передачи электропривода с учетом и без учета корректирующего устройства.

### Заключение (Conclusions)

В работе сформулированы основные теоретические положения методики определения интервального полинома  $D_{\text{int}}(s)$ , сопровождающего характеристический полином  $D(s)$  устойчивой замкнутой системы с применением математического аппарата полиномов Эрмита-Билера в форме последовательного алгоритма с возможностью автоматизации выполнения указанных в данном алгоритме вычислительных процедур. Приведены два альтернативных способа записи формул Виета, характеризующих связь коэффициентов  $a_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) характеристического полинома  $D(s)$  с его корнями  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в левой и правой верхне-треугольных формах. Рассмотрена процедура формирования вариаций корней для случая четной и нечетной степеней характеристического многочлена, позволяющая записать в компактной векторно-матричной форме неравенства, характеризующие границы возможных вариаций корней, при которых соответствующая этим корням пара полиномов удовлетворяет условию получения положительных пар Лобачевского.

Рассмотренная методика применена для анализа локальной робастности позиционного электропривода с двигателем постоянного тока, последовательным корректирующим устройством (ПИ-регулятором) и главной отрицательной обратной связью по угловому перемещению. Получен интервальный полином  $D_{\text{int}}(s)$  и определены верхняя и нижняя границы вариаций параметров, принадлежащих области прямоугольного гиперпараллелепипеда в пространстве нестабильных параметров при сохранении асимптотической устойчивости системы. Подтверждено путем компьютерного моделирования, что анализируемая система робастно устойчива в заданном диапазоне вариаций параметров, причем переходный процесс  $\theta_{up}(t)$  при заданных параметрических изменениях имеет монотонный характер. Данное обстоятельство целесообразно использовать при синтезе малоколебательных систем управления электроприводов. Тем не менее, на основании полученных результатов можно утверждать, что последовательная коррекция и, в том числе, находящие широкое применение при проектировании электроприводов системы подчиненного регулирования, не обеспечивают системе управления, функционирующей в условиях параметрической неопределенности, поддержания эталонного качества переходных характеристик и запасов устойчивости.

Таким образом, в работе сформулирована методика анализа локальной робастности замкнутых систем управления электроприводов, на основании которой имеется возможность проведения исследований различных алгоритмов формирования управляющих воздействий с применением как традиционных, так и адаптивных методов синтеза с целью выявления таких способов коррекции, которые обеспечивают исследуемой системе малую чувствительность к параметрическим возмущениям.

### Литература

1. Фокин А.Л. Синтез робастных систем управления технологическими процессами с типовыми регуляторами. *Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета)*. – 2014. – № 27 (53). – С. 101–106.
2. Oishi, M., Mitchell, I., Tomlin, C. & Saint-Pierre, P. Computing viable sets and reachable sets to design feedback linearizing control laws under saturation. In Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA. 2006; pp. 3801–3807.
3. Воронин А.И., Тютиков В.В. Методика синтеза регуляторов для независимого формирования статических и динамических показателей нелинейных объектов. *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. – 2015. – № 3 (164). – С. 154–164.
4. Greg Anderson, Shankara Paioor, Isil Dillig and Swarat Chaudhuri. Optimization and abstraction: a synergistic approach for analyzing neural network robustness. In Proceedings of the 40th ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation, pp. 731–744, 2019.
5. Куликов В.Е. Решение обратной задачи модального управления при синтезе регулятора минимальной размерности для режима стабилизации вертикальной скорости полета самолета. *Навигация и управление летательными аппаратами*. – 2022. – № 38. – С. 39–59.

6. Zhou, X., Wang, Z., Shen, H., et al. Robust Adaptive Path Tracking Control of Autonomous Ground Vehicles with Considerations of Steering System Backlash. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*. – 2022. – Vol. 7, № 2. – P. 315–325.
7. Balavoine A., Rozell C.J., Romberg J. Discrete and Continuous-time Soft-Thresholding with Dynamic Inputs. In: arXiv preprint arXiv:1405.1361. 2014.
8. Bernstein A., Dall'Anese E., Simonetto A. Online primal-dualmethods with measurement feedback for time-varying convex optimization. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 67.8; 2019, pp. 1978–1991.
9. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Бобко Е.Ю., Тимошенко А.А. Построение интервальных наблюдателей для нестационарных систем. *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2024;25(10):513-519.
10. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ushakov A.V. An Approach Problem with an Unknown Parameter and Inaccurately Measured Motion of the System. *IFAC-Papers-OnLine*. 2018. Vol. 51, № 32. P. 234–238.
11. Новикова А.О. Построение множеств достижимости двумерных нелинейных управляемых систем пиксельным методом. *Труды «Прикладная математика и информатика»*. 2015. Т. 50. С. 62–82.
12. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ershova A.A., Alekseev A.V. Linear Interpolation of Program Control with Respect to a Multidimensional Parameter in the Convergence Problem // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2023. Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1881. P. 324-337.
13. Khan A., Xie W, Zhang L., Liu L. Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst*. 2020. Vol. 14. P. 721-740.
14. Liu L., Xie W. Khan A., Zhang L. Finite-time functional interval observer for linear systems with uncertainties // *IET Control Theory and Applications*. 2020. Vol. 14. P. 2868-2878.
15. N. Malev, "Analysis of the Servo Drive Dynamics with Allowance for Uncertainties by Methods of the Robust Control Theory," 2023 International Ural Conference on Electrical Power Engineering (UralCon), Magnitogorsk, Russian Federation, 2023, pp. 423-429.
16. Wu, X., Xu, K., Lei, M., He, X., "Disturbance-Compensation-Based Continuous Sliding Mode Control for Overhead Cranes with Disturbances", *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 17:4 (2020), 2182–2189.
17. Малёв Н.А. Исследование цифровых моделей чувствительности следящего электропривода. *Вестник Казанского государственного энергетического университета*. – 2024. – Т. 16, № 1(61). – С. 52-69.
18. Duman-Mammadov A., Dincel E., Söylemez M.T. Design of decentralized proportional–integral proportional–retarded controllers in discrete-time domain for two-input two-output processes. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2023;45(3):427-439.
19. Derksen H., Makam V. Invariant Theory and wheeled PROPs. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2023; 227(9):107302.
20. Sun N., Fang Y., Wu Y., and Chen H., "Adaptive Positioning and Swing Suppression Control of Underactuated Cranes Exhibiting Double-Pendulum Dynamics: Theory and Experimentation", Proceedings of 31st Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (Wuhan, China, 2016), 87–92.
21. Малёв Н.А., Погодицкий О.В., Козелков О.В., Малацион А.С. Цифровой алгоритм контроля функционирования электромеханического преобразователя постоянного тока. *Известия высших учебных заведений. ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ*. 2022;24(1):126-140.
22. Срочко В. А., Аргучинцев А. В. Параметрическая регуляризация функционала в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. 2024. Т. 49. С. 32–44.
23. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2022. Т. 28, № 3. С. 66–82.
24. Xu L., Ding F. The parameter estimation algorithms for dynamical response signals based on the multiinnovation theory and the hierarchical principle. *IET Signal Processing*. 2017; 11(2):228-237.
25. Dincel E., Mutlu İ., Schrödel F. et al. Further Results on Dominant Pole Placement via Stability Mapping Approach. *IFAC-PapersOnLine*, 2018; 51(4):918-923.
26. Bhojanapalli S., Neyshabur B., Srebro N. "Global optimality of local search for low rank matrix recovery". In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2016, pp. 3873–3881.
27. Chandak Y. et al. "Optimizing for the future in non-stationary MDPs" In: *Inter-national Conference on Machine Learning*. PMLR. 2020, pp. 1414–1425.
28. Бадонова С.А. О пространстве де Бранжа, связанном с дзета-функцией Римана // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2024. Т. 30, № 2. С. 7–11.

29. Kemper G. Computing quotients by connected solvable groups. *Journal of Symbolic Computation*. 2022;109:426-440.
30. Berthomieu, C. Eder, & M. Safey El Din. msolve: A library for solving polynomial systems. In Proceedings of the 2021 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pages 51-58, 2021.

### Авторы публикации

**Малеев Николай Анатольевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры «Приборостроение и мехатроника» Казанского государственного энергетического университета, г. Казань, Россия. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2224-0681>. maleev@mail.ru

### References

1. Fokin A.L. The Synthesis of Robust Control Systems of Technological Processes with Standard Regulators. *Bulletin of St PbSIT(TU)*. – 2014. – № 27 (53). – P. 101–106 (in Russ.).
2. Oishi, M., Mitchell, I., Tomlin, C. & Saint-Pierre, P. Computing viable sets and reachable sets to design feedback linearizing control laws under saturation. In Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA. 2006; pp. 3801–3807.
3. Voronin A.I., Tyutikov V.V. Procedure for the Synthesis of Controllers for Independent Formation of Static and Dynamic Parameters of Nonlinear Objects. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences* – 2015. – № 3 (164). – P. 154–164 (in Russ.).
4. Greg Anderson, Shankara Pailoor, Isil Dillig and Swarat Chaudhuri. Optimization and abstraction: a synergistic approach for analyzing neural network robustness. In Proceedings of the 40th ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation, pp. 731–744, 2019.
5. Kulikov, V.E. Inverse Problem of Modal Control Solution Using Reduced-Dimension Controller Synthesis for Aircraft Vertical Speed Hold. *Navigation and control of aircraft*. – 2022. – № 38. – P. 39–59 (in Russ.).
6. Zhou, X., Wang, Z., Shen, H., et al. Robust Adaptive Path Tracking Control of Autonomous Ground Vehicles with Considerations of Steering System Backlash. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*. – 2022. – Vol. 7, № 2. – P. 315–325.
7. Balavoine A., Rozell C.J., Romberg J. Discrete and Continuous-time Soft-Thresholding with Dynamic Inputs. In: arXiv preprint arXiv:1405.1361. 2014.
8. Bernstein A., Dall’Anese E., Simonetto A. Online primal-dualmethods with measurement feedback for time-varying convex optimization. In: IEEE Transactions on Signal Processing 67.8; 2019, pp. 1978–1991.
9. Zhirabok A.N., Zuev A.V., Bobko E.Yu., Timoshenko A.A. Interval Observers Design for Non-Stationary Systems. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2024;25(10):513-519. (In Russ.)
10. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ushakov A.V. An Approach Problem with an Unknown Parameter and Inaccurately Measured Motion of the System. IFAC-Papers-OnLine. 2018. Vol. 51, № 32. P. 234–238.
11. Novikova A.O. Construction of reachability sets of two-dimensional nonlinear control systems using the pixel method. *Proceedings "Applied Mathematics and Computer Science"*. 2015. Vol. 50. P. 62–82.
12. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ershova A.A., Alekseev A.V. Linear Interpolation of Program Control with Respect to a Multidimensional Parameter in the Convergence Problem // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2023. Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1881. P. 324-337.
13. Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L. Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. Vol. 14. P. 721-740.
14. Liu L., Xie W., Khan A., Zhang L. Finite-time functional interval observer for linear systems with uncertainties // IET Control Theory and Applications. 2020. Vol. 14. P. 2868-2878.
15. N. Malev, "Analysis of the Servo Drive Dynamics with Allowance for Uncertainties by Methods of the Robust Control Theory," 2023 International Ural Conference on Electrical Power Engineering (UralCon), Magnitogorsk, Russian Federation, 2023, pp. 423-429.
16. Wu, X., Xu, K., Lei, M., He, X., "Disturbance-Compensation-Based Continuous Sliding Mode Control for Overhead Cranes with Disturbances", IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 17:4 (2020), 2182–2189.
17. Malev N.A. Research of digital models of the sensitivity of a servo drive. Bulletin of Kazan State Power Energy University. – 2024. – Vol. 16, № 1(61). – P. 52-69.
18. Duman-Mammadov A., Dincel E., Söylemez M.T. Design of decentralized proportional–integral proportional–retarded controllers in discrete-time domain for two-input two-output processes. Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2023;45(3):427-439.

19. Derksen H., Makam V. Invariant Theory and wheeled PROPs. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 2023; 227(9):107302.
20. Sun N., Fang Y., Wu Y., and Chen H., “Adaptive Positioning and Swing Suppression Control of Underactuated Cranes Exhibiting Double-Pendulum Dynamics: Theory and Experimentation”, *Proceedings of 31st Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (Wuhan, China, 2016)*, 87–92.
21. Malev N.A., Pogoditsky O.V., Kozelkov O.V., Malacion A.S. Digital algorithm monitoring functioning of electromechanical dc converter. *Power engineering: research, equipment, technology*. 2022;24(1):126-140. (In Russ.).
22. Srochko V. A., Arguchintsev A. V. Parametric Regularization of the Functional in a Linear-quadratic Optimal Control Problem. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 32–44. (in Russ.).
23. Dmitruk N. M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. 112–128.
24. Xu L., Ding F. The parameter estimation algorithms for dynamical response signals based on the multiinnovation theory and the hierarchical principle. *IET Signal Processing*. 2017; 11(2):228-237.
25. Dincel E., Mutlu İ., Schrödel F. et al. Further Results on Dominant Pole Placement via Stability Mapping Approach. *IFAC-PapersOnLine*, 2018; 51(4):918-923.
26. Bhojanapalli S., Neyshabur B., Srebro N. “Global optimality of local search for low rank matrix recovery”. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2016, pp. 3873–3881.
27. Chandak Y. et al. “Optimizing for the future in non-stationary MDPs” In: *Inter-national Conference on Machine Learning*. PMLR. 2020, pp. 1414–1425.
28. Badonova S.A. On a de Branges space related to the Riemann zeta function. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennaya nauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 7–11.
29. Kemper G. Computing quotients by connected solvable groups. *Journal of Symbolic Computation*. 2022;109:426-440.
30. Berthomieu, C. Eder, & M. Safey El Din. msolve: A library for solving polynomial systems. In *Proceedings of the 2021 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 51-58, 2021.

### Authors of the publication

**Nikolai A. Malev** – Kazan State Power Engineering University, Kazan, Russia. *ORCID*: <https://orcid.org/0000-0003-2224-0681>. maleev@mail.ru

*Шифр научной специальности: 2.4.2. Электротехнические комплексы и системы*

**Получено** **21.01.2025 г.**

**Отредактировано** **07.09.2025 г.**

**Принято** **04.10.2025 г.**