УДК 536.3:535.34

К РАСЧЕТУ ЛУЧИСТЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

А.В. САДЫКОВ

Нижнекамский химико–технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Приводятся результаты численного решения тестовых задач для двумерной прямоугольной области с использованием S_2-, S_4-, S_6- приближений метода дискретных ординат и сравнение полученных результатов с данными других авторов.

Ключевые слова: радиационный теплообмен, интенсивность излучения, контрольный объем.

Радиационный теплообмен является основным в большинстве технологических трубчатых печей нефтехимической промышленности. При заданном поле температуры, радиационных свойств излучающей среды и ограничивающих поверхностей расчет лучистого теплообмена в стационарном случае сводится к решению интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (УПИ) при соответствующих граничных условиях. Для решения УПИ применяется множество различных методов. В задачах лучистого теплообмена широко используется метод дискретных ординат (МДО), предложенный Чандрасекаром [1]. Метод получил развитие в работах как зарубежных, так и отечественных ученых. Преимуществом этого метода является то, что он удачно объединяется с алгоритмами, основанными на применении контрольных объемов. В частности, метод был использован автором статьи в ряде работ [2–4 и др.].

Рассмотрим уравнение переноса излучения в двумерной прямоугольной области, показанной на рис. 1.

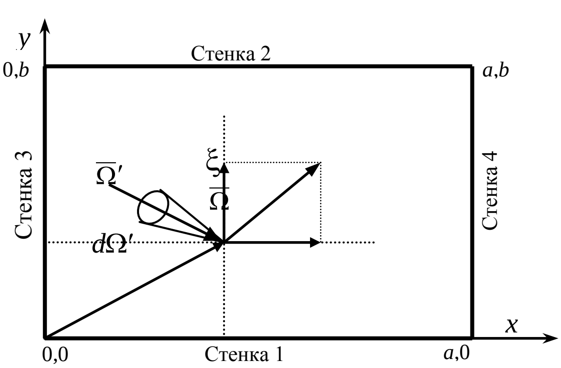

Рис. 1. Система координат

Для излучающей, поглощающей и рассеивающей серой среды уравнение имеет вид

$$\mu\frac{\partial I(\bar{r},\overline{\Omega})}{\partial x}+\xi\frac{\partial I(\bar{r},\overline{\Omega})}{\partial y}=\alpha I_b(T)-(\alpha+\beta)I(\bar{r},\overline{\Omega})+\frac{\beta}{4\pi}\int\limits_{(4\pi)}I(\bar{r},\overline{\Omega}')\gamma(\overline{\Omega}',\overline{\Omega})d\Omega' . \quad (1)$$

Здесь μ, ξ – направляющие косинусы; $I(\bar{r},\bar{\Omega})$ – интенсивность излучения, зависящая от положения и направления; α, β – коэффициенты поглощения и рассеяния среды соответственно; $\gamma(\bar{\Omega}',\bar{\Omega})$ – индикатриса рассеяния; $I_b(T)$ – интенсивность излучения черного тела при температуре T.

Граничное условие к уравнению (1), с учетом диффузного излучения и отражения, имеет вид

$$I(\bar{r},\bar{\Omega}) = \varepsilon I_b(T) + \frac{\rho}{\pi} \int\limits_{\bar{n}\bar{\Omega}'<0} \left|\bar{n}\cdot\bar{\Omega}'\right| I(\bar{r},\bar{\Omega}')d\Omega' \qquad (2)$$

для таких направлений $\bar{\Omega}$, для которых $\bar{n}\cdot\bar{\Omega} > 0$. Здесь $\bar{\Omega}'$ – направление падающего излучения; $\bar{\Omega}$ – направление испускаемого излучения; ε – степень черноты граничной поверхности; ρ – отражательная способность поверхности; $\bar{n}$ – единичный вектор внутренней нормали к границе.

В МДО УПИ (1) заменяется системой дифференциальных уравнений относительно интенсивности излучения вдоль ограниченного количества выделенных направлений $\bar{S}_m$ $\{m = 1, 2, \ldots, N_0\}$. Эти направления задаются угловыми координатами $\{\mu_m, \xi_m;\ m = 1, 2, \ldots, N_0\}$, равными величине проекции единичного вектора направления $\bar{S}_m$ на оси координат $0x$ и $0y$ соответственно. Исходя из числа выделенных направлений, различают S_2-приближение (N_o=4), S_4-приближение (N_o=12) и другие. Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений относительно интенсивности излучения I_m вдоль каждого из этих направлений:

$$\mu_m \frac{\partial I_m}{\partial x} + \xi_m \frac{\partial I_m}{\partial y} = \alpha I_b - (\alpha+\beta)I_m + \frac{\beta}{4\pi}\sum_{m''=1}^{N_0} w_{m'}\varphi_{m'm}I_{m'},\ m=1,2,3,\ldots,N_o, \qquad (3)$$

где w_m – угловые весовые коэффициенты. Индексы m', m обозначают направления падающего и испускаемого излучения соответственно. Угловые весовые коэффициенты w_m связывают между собой интенсивности излучения вдоль различных направлений. Эти коэффициенты численно равны площади единичной сферы, отсекаемой соответствующим направлению $\bar{S}_m$ телесным углом $\Delta\Omega$.

Интегральный член в уравнении переноса (1) заменяется квадратурной формулой Гаусса. Индикатриса рассеяния, характеризующая рассеяние лучистой энергии мельчайшими частицами сажи во всех направлениях, записывается в упрощенном виде:

$$\gamma(\theta) = 1 + g_1\cos\theta.$$

Коэффициент $\varphi_{m'm}$, учитывающий анизотропию рассеяния при квадратурном представлении интегрального члена, определяется по выражению

$$\varphi_{m'm} = 1 + g_1[\mu_m\mu_{m'} + \xi_m\xi_{m'} + \eta_m\eta_{m'}].$$

Показателем асимметрии является коэффициент g_1, который заключен в диапазоне $-1 \le g_1 \le 1$. Для изотропного рассеяния $g_1 = 0$ ($\varphi_{m'm} = 1$).

Граничное условие (2), характеризующее излучение раскаленных стенок и отражение лучей, падающих со всех направлений, в МДО для различных стенок аппроксимируется следующим образом:

$$I_m = \varepsilon I_b(T_w) + \frac{\rho}{\pi}\sum_{m'=1}^{N_0} w_{m'}\left|\mu_{m'}\right| I_{m'} \tag{4}$$

при x=0 (стенка 3 рис.1) $\mu_m > 0$ и $\mu_{m'} < 0$; при x=a (стенка 4) $\mu_m < 0$ и $\mu_{m'} > 0$;

$$I_m = \varepsilon I_b(T_w) + \frac{\rho}{\pi}\sum_{m'=1}^{N_0} w_{m'}\left|\xi_{m'}\right| I_{m'} \tag{5}$$

при y=0 (стенка 1) $\xi_m > 0$ и $\xi_{m'} < 0$; при y=b (стенка 2) $\xi_m < 0$ и $\xi_{m'} > 0$.

В выражениях (4)–(5) вторым членом в правых частях описывается отраженный поток лучистой энергии, при этом суммирование ведется только по направлениям падения лучей.

Дискретные аналоги уравнения (3) получаются интегрированием его по контрольному объему вокруг точки (i, j), показанному на рис. 2. В результате получаем систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_m A_j\left(I_{m(i+1,j)} - I_{m(i-1,j)}\right) + \xi_m B_i\left(I_{m(i,j+1)} - I_{m(i,j-1)}\right) = F_{i,j} - \psi_{i,j} + S_{i,j}\,;\\
&F_{i,j} = \alpha_{i,j} I_b(T_{i,j})\sigma_{i,j}\,;\quad \psi_{i,j} = (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j})\sigma_{i,j}\,;\\
&S_{i,j} = \frac{\beta_{i,j}\sigma_{i,j}}{4\pi}\sum_{m'=1}^{N_0} w_{m'}\varphi_{m'm} I_{m'(i,j)}\,;\ \sigma_{i,j} = 4B_i A_j\,;\\
&A_j = 0{,}5(y_{j+1} - y_j)\,;\ B_i = 0{,}5(x_{i+1} - x_i)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

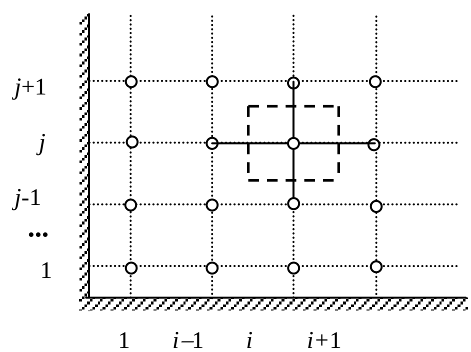

Рис. 2. Разностная сетка

Решение системы уравнений (6) для каждого из ординатных направлений находится методом итераций. В каждой итерации используется метод покоординатной прогонки. Допустим, что искомая величина $I_{m(i,j)}$ в узловой точке (i, j) связана со значениями в соседних узловых точках следующими выражениями:

$$I_{m(i,j)} = \omega I_{m(i,j+1)} + (1-\omega), \quad I_{m(i,j-1)} = \omega I_{m(i+1,j)} + (1-\omega) I_{m(i-1,j)},$$

где ω – интерполяционный коэффициент.

Формулы для численного решения алгебраических уравнений получаются следующим образом. Рассмотрим направление интегрирования, для которого μ_m>0 и ξ_m>0 и индексы возрастают. Значения интенсивностей $I_{m(i,j-1)}$ и $I_{m(i-1,j)}$ будем считать известными, которые назовем опорными значениями. Из соотношения (7) выражаем интенсивности $I_{m(i,j+1)}$, $I_{m(i+1,j)}$ через опорные значения и подставляем в уравнение системы (6). В результате приходим к следующей прогоночной формуле:

$$I_{m(i,j)} = \frac{\mu_m A_j I_{m(i-1,j)} + \xi_m B_i I_{m(i,j-1)} + \omega(F_{i,j} + S_{i,j})}{\omega\psi_{i,j} + \mu_m A_j + \xi_m B_i}.$$

Пусть теперь $\mu_m > 0$, $\xi_m < 0$. Опорными значениями интенсивностей считаем $I_{m(i-1,j)}$ и $I_{m(i,j+1)}$. Из соотношения (7) выражаем $I_{m(i,j-1)}$, $I_{m(i+1,j)}$ и подставляем в уравнение системы (6). В результате получаем формулу для значения интенсивности в средней узловой точке $I_{m(i,j)}$

$$I_{m(i,j)} = \frac{\mu_m A_j I_{m(i-1,j)} - \frac{\omega}{1-\omega}\xi_m B_i I_{m(i,j+1)} + \omega(F_{i,j} + S_{i,j})}{\omega\psi_{i,j} + \mu_m A_j - \frac{\omega}{1-\omega}\xi_m B_i}$$

Для других значений угловых координат μ_m и ξ_m получаются аналогичные выражения.

Итерационный процесс для решения системы (6) совместно с дискретными аналогами граничных условий (4), (5) реализуется по следующей схеме.

1. Задается начальное приближение для $I_{m(i,j)}$ в узловых точках области.

2. В граничных узловых точках области производится расчет интенсивностей излучения по выражениям (4), (5). В первой итерации границы считаются черными, а слагаемые, описывающие рассеяние излучения во внутренние ячейки, равными нулю. В последующих итерациях используются заданные значения степени черноты стенок и учитываются члены, описывающие рассеяние излучения на частицах сажи.

3. Для каждого ординатного направления (μ_m, ξ_m) (m=1, 2, 3, …, N_0) обходятся все узлы разностной сетки и вычисляются значения интенсивностей $I_{m(i,j)}$ по соответствующей прогоночной формуле с учетом знаков μ_m и ξ_m.

4. Полученные значения интенсивностей $I_{m(i,j)}$ принимаются за начальные значения для следующего шага итерации и происходит переход к пункту 2. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_{i,j}\left|\frac{\varphi_{i,j}^{n} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\varphi_{i,j}^{n}}\right| < \delta,$$

где n – номер предыдущей итерации; δ – заданная малая величина; $\varphi_{i,j} = \sum_{m=1}^{N_0} w_m I_{m(i,j)}$ – объемная плотность энергии излучения.

После завершения итерационного процесса компоненты вектора плотности результирующего потока излучения в направлениях x и y в узловых точках определяются суммированием по всем направлениям:

$$q_x = \sum_{m=1}^{N_0} \mu_m w_m I_m\ ; \qquad q_y = \sum_{m=1}^{N_0} \xi_m w_m I_m\ .$$

В работе [5] приведены результаты численного решения задачи лучистого теплообмена в двумерной прямоугольной области, заполненной изотропно-рассеивающей, поглощающей и излучающей средой (рис. 3), зональным методом,

методом сферических гармоник (в P_3-приближении) и точное решение. В указанной работе рассмотрены три случая: 1) объем с изотропно рассеивающей средой с черными границами; 2) объем с изотропно рассеивающей средой и с серыми границами; 3) объем с поглощающей средой с черными границами. Здесь приведены результаты численного решения этих задач в S_2-, S_4-, S_6-приближениях МДО с помощью разработанных нами программ. При этом использовались конечно-разностные сетки 10×20, 20×20. На всех рисунках приведены результаты, полученные с использованием сетки 20×20. Численные исследования показали, что дальнейшее дробление сетки в случае однородной среды не приводит к уточнению результатов. Направляющие косинусы и весовые множители такие же, что и в работе [5].

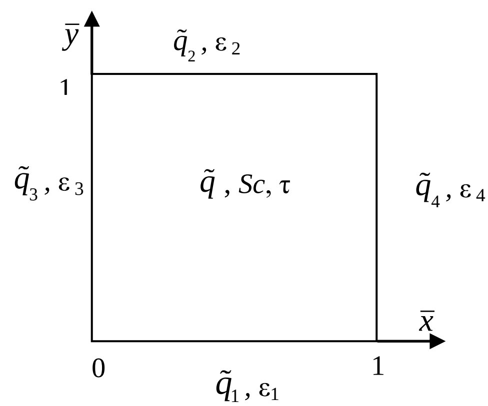

Рис. 3. Область интегрирования.
Индексы параметров соответствуют номерам стенок

Итерации прекращались при достижении максимального отличия значений объемной плотности лучистой энергии в двух последовательных итерациях не более 0,1%. Результаты расчетов приведены в безразмерном виде. Значения поверхностных плотностей радиационных тепловых потоков отнесены к интегральной энергетической светимости абсолютно черного тела соответствующей температуры $q_b = \sigma T^4$ $(\tilde{q} = q_p / q_b)$. В качестве линейного масштаба принята длина стороны квадрата.

Изотропно рассеивающая однородная среда

Предположим, что излучающей стенкой является 1-я стенка $(\tilde{q}_1 = 1)$, для других границ приняты условия $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_3 = \tilde{q}_4 = 0$. В расчетах критерий Шустера Sc=1, оптическая толщина среды τ=1.

На рис. 4 показаны графики изменения безразмерных поверхностных плотностей потока результирующего излучения на стенке 1 от ее края к середине для значений ее степени черноты: $\varepsilon_1 = 1$; 0,5; 0,1. Результаты, полученные с использованием S_4-, S_6-приближений хорошо согласуются с результатами расчета по зональному методу. Для абсолютно черных границ (ε =1) отличия не превышают 2% для S_6-приближения, 7% – для S_2-приближения.

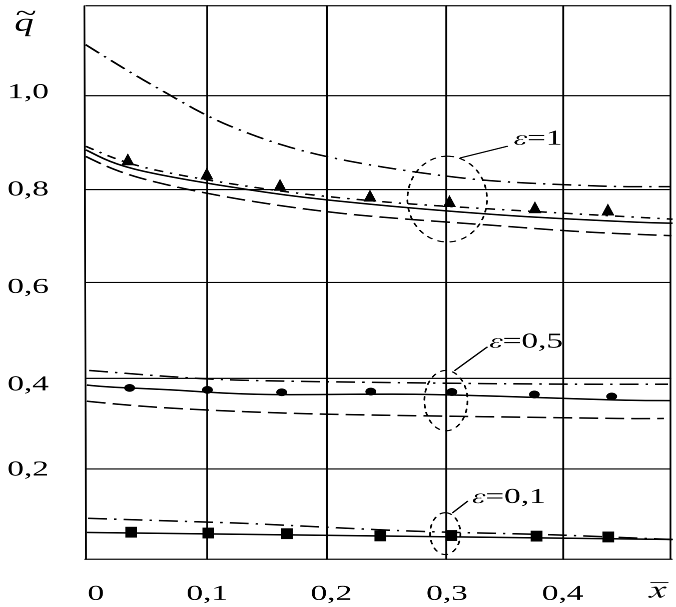

Рис.4. Распределения безразмерных поверхностных плотностей лучистых потоков к ст. 1: $-\cdot-\cdot$ P_3 [6], $----$ S_2, —— S_4; $-\cdot\cdot-\cdot$ S_6; ●, ■, ▲ – зональный метод [6]

Для серых границ (ε =0,5; ε =0,1) для S_4-, S_6-приближений наблюдается хорошее соответствие с зональным методом, при этом кривые для этих приближений практически совпадают. Поэтому на этом рисунке для этих случаев приведена кривая только для S_4-приближения.

При уменьшении степени черноты стенки точность S_2-приближения ухудшается. При ε =0,5 отличия достигают почти 15%. Однако следует отметить, что в топочных устройствах степень черноты обычно меняется в пределах от 0,6 до 0,9.

Ухудшение точности S_2-приближения при уменьшении ε объясняется тем, что увеличивается доля отраженного излучения, и в граничных условиях преобладающим становится слагаемое, учитывающее падающее на стенку излучение, а собственное излучение стенки становится незначительным. Ввиду того, что в МДО угловое распределение интенсивности излучения аппроксимируется конечным числом угловых интервалов, то анизотропии рассеяния и отражения в низших приближениях этого метода не учитываются.

Графики изменения относительной объемной плотности энергии излучения $\widetilde{U}$ в зависимости от безразмерной координаты $\overline{y}$ для сечений $\overline{x}$ =0,5; 0,3; 0,1 при τ=1 показаны на рис. 5. При этом границы считались абсолютно черными.

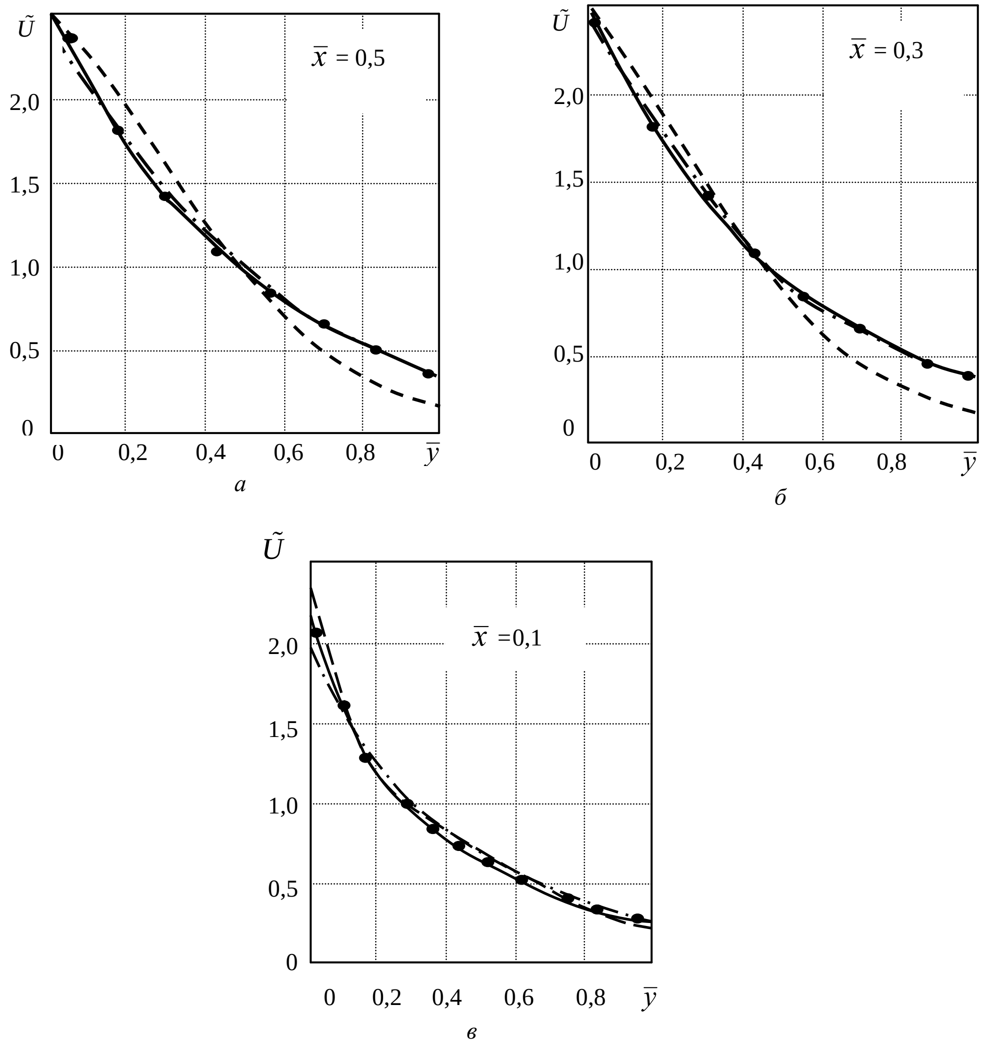

Рис. 5. Изменение объемной плотности энергии излучения в поперечном направлении: ——— – S_6; –·–·– – P_3 [6]; - - - - - – S_2; ● – зональный метод [6]

Результаты расчетов, полученные с использованием S_2-, S_4-, S_6-приближений сравниваются с результатами, полученными зональным методом и в P_3-приближении метода сферических гармоник (МСГ) [6]. Использование S_2-приближения приводит к завышенным значениям вблизи горячей поверхности и к заниженным – вблизи холодной стенки. Как видно из рис. 5, погрешности являются наибольшими вблизи средней линии ($\bar{x}$ =0,5) и убывают при приближении к боковым стенкам ($\bar{x}$ =0,3; 0,1). Следует также отметить, что вблизи боковой стенки ($\bar{x}$ =0,1) S_4-, S_6-приближения дают почти одинаковые результаты.

Однородная среда без рассеяния излучения

Здесь даются сопоставления результатов расчетов с аналогичными результатами, полученными при следующих идеализированных случаях: 1) границы двумерной прямоугольной области полностью поглощают излучение среды, но сами не излучают ($\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{q}_3 = \tilde{q}_4 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ – абсолютно черные холодные стенки); 2) в среде отсутствуют центры рассеивания (Sc=0); 3) мощность излучения среды поддерживается равной единице ($\tilde{q} = 1$). Оптическая толщина среды принимает значения: τ=0,1; 1; 10.

Распределения безразмерных поверхностных плотностей потока результирующего излучения на стенке 1 при трех оптических условиях показаны на рис. 6.

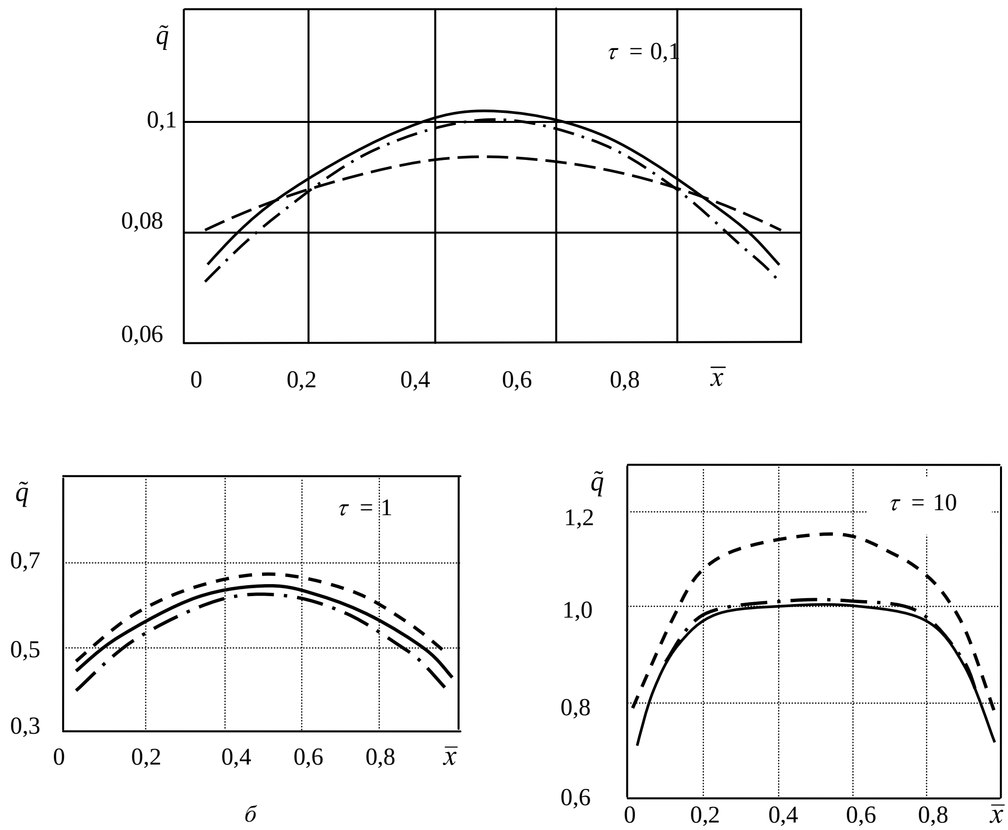

Рис.6. Распределения безразмерных плотностей результирующих потоков излучения:
——— –точное решение [5]; — · — · – S_6 , — — — – S_2

Решение, полученное в S_2-приближении, дает значения $\tilde{q}$, значительно отличающиеся от точного решения во всех точках для оптических условий τ=0,1; τ=10. S_4-, S_6 -приближения дают значения с более высокой точностью, причем наибольшие отклонения наблюдаются в центре поверхности. Результаты расчетов, полученные с использованием этих приближений, почти совпадают. Например, при τ=0,1 максимальные отличия результатов не превышают 0,001. При таком выборе масштаба кривые практически совпадают. Поэтому на рисунке кривая для S_4-приближения не приведена.

Во всех рассмотренных случаях S_6-приближение обеспечивает наилучшее согласие с точным решением, при этом отличия результатов расчетов от точного решения не превышают 6%. В проведенных численных исследованиях интерполяционный коэффициент ω=0,5.

Преимуществом МДО, как уже было отмечено выше, является сочетаемость с алгоритмами, основанными на применении контрольных объемов. Кроме этого, важным преимуществом МДО является то, что для перехода от низшего приближения к более высокому достаточно изменить в расчетной программе значение N_0, массивы μ_m,

ξ_m, w_m (m=1, 2, 3, …, N_0). Опыт использования МДО и МСГ при решении задач сложного теплообмена показал, что МДО экономичен как в плане затрат машинного времени, так и в плане необходимого объема оперативной памяти компьютера.

S_2-приближение непригодно для расчетов излучения в чисто поглощающей среде. Причиной расхождений между численными результатами и точным решением является «лучевой эффект». Такая погрешность обусловлена конечной дискретизацией угловой переменной в уравнении переноса излучения. Излучение может распространяться только вдоль фиксированных дискретных направлений. Излучение от изолированного источника может не восприниматься некоторой точкой, если эта точка и источник не лежат на каком-либо из дискретных направлений. В задачах с чисто поглощающей средой и малым числом ординатных направлений точки области слабо связаны с соседними точками. Члены, описывающие рассеяние внутрь, связывают данную точку с ее соседними точками, в результате чего уменьшается погрешность метода. «Лучевой эффект» можно ослабить, увеличивая число ординатных направлений. В большинстве задач, имеющих практическое значение, рассеяние нужно учитывать. При уменьшении степени черноты стенки точность S_2-приближения ухудшается. S_2 -приближение рекомендуется использовать при значениях ε в пределах от 0,6 до 1.

Литература

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: ИЛ, 1953. 431с.

2. Садыков А.В., Вафин Д.Б., Садыкова Д.А. Зависимость тепловых и аэродинамических характеристик трубчатых печей от расположения ярусов веерных горелок // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2014. №11–12. С.3–10.

3.Садыков А.В. Методика расчета сопряженного теплообмена в трубчатой печи производства водорода в рамках дифференциального метода // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2013. №7–8. С.3–11.

4. Садыков А.В. Влияние подсоса воздуха на сопряженный теплообмен в трубчатой печи производства водорода // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2014. №1–2. С.37–44.

5. Fiveland W. A. Discrete – ordinate solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures // Trans. ASME: J. Heat Transfer. 1984. V. 106, №4. P. 699 – 706.

6. Ratzel A., Howell J. Two – Dimensional Radiation in Absorbing – Emitting – Scattering Media Using the P N Approximation // ASME Paper No. 82 HT 19, 1982.

Поступила в редакцию ***15 марта 2016 г.***

Садыков Айдар Вагизович – канд. техн. наук, доцент, декан факультета управления и автоматизации Нижнекамского химико–технологического института (филиал) (НХТИ), г. Нижнекамск. Тел.: 8(8555)392314; 8(917)8624162. E-mail: sadykov_av@mail.ru; sadykov@land.ru.