УДК 621.1:531.3

# О ПРОБЛЕМЕ УЧЁТА ЭМПИРИЧЕСКОГО ЗАКОНА «СУХОГО» ТРЕНИЯ В ДИНАМИКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Л.Ш. ХАКИМУЛЛИНА**

**Казанский государственный энергетический университет**

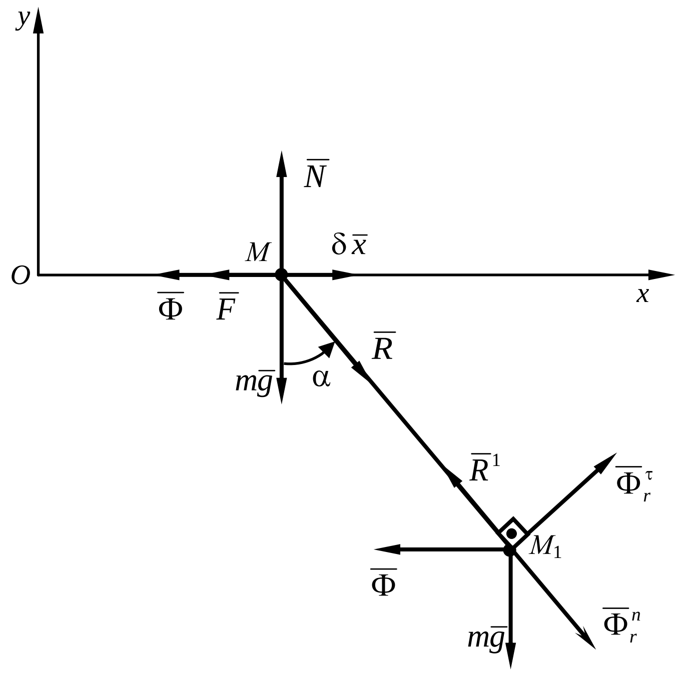
***Исследуется парадоксальная область отсутствия или двойственности решения в задаче определения движения эллиптического маятника при учете эмпирического закона сухого трения Кулона. Выявлено, что параметрическое условие, определяющее эту область, имеет механический смысл, который согласуется с законом трения покоя для скользящего элемента маятника.***

***Ключевые слова: эллиптический маятник, сухое трение, парадокс Пэнлеве, принцип Даламбера-Лагранжа.***

Известно, что в динамике механических систем существует проблема учёта сил трения, заключающаяся в том, что применение закона «сухого» трения Кулона при определении движения некоторых систем приводит к противоречию с законами динамики, называемая парадоксом Пэнлеве [1]. Одним из наиболее известных и многократно исследованных и анализируемых по настоящее время, является пример Пэнлеве-Клейна, изучаемый также автором в работах [2]-[3]. В работе [3] изучалась причина отсутствия, либо двойственности решения уравнений динамики в парадоксальной области параметров системы при использовании эмпирического закона «сухого» трения Кулона в примере Лэнлеве-Клейна. Показано, что ею является не абстрагирование в ньютоновской механике от деформируемости реальных тел, как принято считать, а зависимость давления движущихся тел на связь и, следовательно, трения от их ускорения, обусловленная конструктивными особенностями и параметрами механизмов в выявленных случаях. Последнее приводит к несоблюдению аксиомы независимости действия сил динамики и, как следствие, несоблюдению принципа Даламбера–Лагранжа.

Исследуем менее известную и более сложную задачу динамики эллиптического маятника с двумя степенями свободы, подробно рассмотренную выдающимся французским механиком П. Аппелем в своём трактате по теоретической механике [4] с целью демонстрации выявленного в этом случае парадокса Пэнлеве. Ползун $M$ и груз $M_1$ одинаковой массы $m$, принимаемые за материальные точки, связаны, как и в примере Пэнлеве-Клейна, жёстким стержнем пренебрежимой массы. Механическая система $MM_1$ движется в вертикальной плоскости $0xy$ под действием сил тяжести. При этом точка $M$ движется по двухсторонней горизонтальной направляющей с коэффициентом трения $f$, вдоль которой направлена ось $x$ (рисунок).

Покажем, что и в этом примере прослеживается та же закономерность, что и в примере Пэнлеве-Клейна, ведущая к нарушению принципа Даламбера-Лагранжа. Обозначим через φ угол $xMM_1$, через $x$ – абсциссу точки $M$. Рассмотрим начальное движение системы из состояния покоя ползуна: $\dot{x}_0 = 0.$(рисунок). За обобщённые координаты примем координату $x$ и угол α. Расстояние между точками обозначим $l$. Заменим горизонтальную связь гладкой, приняв силу трения $\overline{F}$ за активную силу. На рисунке она направлена в сторону, противоположную возможному начальному движению ползуна. Приложим к точкам силы инерции, как указано на рисунке.




Рисунок

Пусть $\overline{a}$ – вектор ускорения точки $M$, тогда сила инерции, приложенная к этой точке, направлена в противоположную сторону: $\overline{\Phi} = -m\overline{a}$. Рассмотрим движение точки $M_1$ как сложное, разложив его на переносное горизонтальное движение вместе с точкой $M$ и относительное вращательное движение вокруг точки $M$. Тогда ускорение точки $M_1$ определяется по теореме сложения ускорений: $\overline{a}_1 = \overline{a} + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau$, где $\overline{a}_r^n$ – нормальная составляющая; $\overline{a}_r^\tau$ – касательная составляющая относительного ускорения. Соответствующие силы инерции, приложенные к точке $M_1$ и $M$ (см. рисунок), определяются по формулам:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}, \quad \overline{\Phi}_r^n = -m\overline{a}_r^n, \quad \overline{\Phi}_r^\tau = -m\overline{a}_r^\tau.$$

Их модули равны:

$$\Phi = m\,|\,\ddot{x}\,| = m\,a, \quad \Phi_r^n = m\,l\dot{\alpha}^2, \quad \Phi_r^\tau = m\,l\,|\,\ddot{\alpha}\,|. \tag{1}$$

Применим принцип Даламбера-Лагранжа. Дадим системе виртуальное перемещение: $\delta x \neq 0$, $\delta\alpha = 0$. Составим уравнение для работ сил системы на этом виртуальном перемещении:

$$-2\Phi\delta x - F\cdot\delta x + \Phi_r^\tau\cos\alpha\cdot\delta x + \Phi_r^n\sin\alpha\cdot\delta x = 0. \tag{2}$$

Подставляя в равенство (2) выражения для сил инерции (1), получим:

$$(-2m\,a - F + m\,l\,|\,\ddot{\alpha}\,|\cos\alpha + m\,l\dot{\alpha}^2\cdot\sin\alpha)\delta x = 0. \tag{3}$$

Подставим в равенство (3) выражение для силы трения скольжения, следуя закону Кулона $F = fN$:

$$(-2ma - fN + ml|\ddot{\alpha}|\cos\alpha + m l\dot{\alpha}^2 \cdot \sin\alpha)\delta x = 0. \quad (4)$$

Далее составим уравнение для работ сил системы на виртуальном перемещении

$$\delta\alpha \neq 0, \quad \delta x = 0:$$

$$-\Phi l\cos\alpha \cdot \delta\alpha + \Phi_r^{\tau} \cdot l \cdot \delta\alpha - mgl \cdot \sin\alpha \cdot \delta\alpha = 0.$$

Подставляя в это равенство выражения для сил инерции и сокращая на $m$ и $l$, при произвольной бесконечно малой величине $\delta\alpha$ имеем

$$-a\cos\alpha + |\ddot{\alpha}|\,l - g\sin\alpha = 0. \quad (5)$$

Для получения явного выражения нормальной реакции $N$ см (рисунок) от ускорения ползуна воспользуемся условием равновесия механической системы в проекциях на ось $y$ при $N_y > 0$ :

$$N - 2mg + \Phi_r^{\tau}\sin\alpha - \Phi_r^{n}\cos\alpha = N - 2mg + ml|\ddot{\alpha}|\sin\alpha - m l\dot{\alpha}^2\cos\alpha = 0.$$

Откуда явная зависимость нормальной реакции от ускорения точки $M$ с учётом (5) имеет вид:

$$N = mg(1+\cos^2\alpha) - ma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha + m l\dot{\alpha}^2\cos\alpha \quad (6)$$

Выразим $ma$ из уравнения (6) :

$$ma = \frac{-N + mg(1+\cos^2\alpha) + ml\dot{\alpha}^2\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}. \quad (7)$$

Исключая в уравнении (4) силы инерции $ma$ и $ml\ddot{\alpha}$ с помощью уравнений (5) и (7), после простых преобразований получим

$$(N(1+\sin^2\alpha - f\sin\alpha\cos\alpha) - 2mg - m l\dot{\alpha}^2\cos\alpha)\delta x = 0\,. \quad (8)$$

При начальных значениях $\alpha_0$, заключенных между 0 и $\pi/2$ и удовлетворяющих условию $f\sin\alpha_0\cos\alpha_0 > 1+\sin^2\alpha_0$, равенство (8) при произвольном бесконечно малом $\delta x$ перейдёт в неравенство и, следовательно, механическая система при заданных условиях нарушает принцип Даламбера-Лагранжа. В то же время при $f\sin\alpha\cos\alpha < 1+\sin^2\alpha$ равенство (8), выражающее принцип Даламбера-Лагранжа, не нарушается и нормальная реакция определяется по формуле:

$$N = \frac{2mg + ml\dot{\alpha}^2\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha - f\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\ . \quad (9)$$

При условии $f\sin\alpha_0\cos\alpha_0 > 1+\sin^2\alpha_0$ начальное ускорение $a$ удовлетворяет принципу Даламбера-Лагранжа и выражается формулой

$$a = \ddot{x} = \frac{g(f(1+\cos^2\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha) + l\dot{\alpha}^2(f\cos\alpha - \sin\alpha)}{f\sin\alpha\cos\alpha - 1 - \sin^2\alpha}, \quad (10)$$

где из условия $f\sin\alpha_0\cos\alpha_0 > 1+\sin^2\alpha_0$ следует $f\sin\alpha_0\cos\alpha_0 > \sin^2\alpha_0$ и

$$f\cos\alpha_0 > \sin\alpha_0. \quad (11)$$

Из последнего неравенства имеем $f\cos^2\alpha_0 > \sin\alpha_0\cos\alpha_0$ и $f(\cos^2\alpha_0 + 1) > \sin\alpha_0\cos\alpha_0$. Следовательно, числитель и знаменатель в формуле (10) имеют в начальный момент положительные знаки и противоречия нет. Соответственно относительное касательное ускорение равно

$$|a_r^\tau| = l\,|\ddot{\alpha}| = \frac{(2g + l\dot{\alpha}^2\cos\alpha)(f\cos\alpha - \sin\alpha)}{f\sin\alpha\cos\alpha - 1 - \sin^2\alpha}, \tag{12}$$

где правая часть также положительна при выбранных на рис. 1 направлениях сил инерции, силы трения и нормальной реакции $\overline{N}$. При $N_y < 0$ стержень должен быть не растянут, а сжат. Следовательно, реакция стержня $\overline{R}$ будет направлена вверх и начальное движение ползуна из состояния покоя может быть только влево. Векторы силы инерции ползуна и силы трения сменят при этом направления на противоположные (рис. 1). В этом предполагаемом случае не соблюдается принцип Даламбера для нижней точки при любом соотношении между коэффициентом трения $f$ и $\alpha_0$. Поэтому этот случай исключается из рассмотрения, как физически неосуществимый. Таким образом, в рассмотренном случае нарушается принцип Даламбера-Лагранжа только при определении нормальной реакции $\overline{N}$. В то же время при $f\sin\alpha_0\cos\alpha_0 < 1 + \sin^2\alpha_0$ равенство (8), выражающее принцип Даламбера-Лагранжа, не нарушается.

Для дальнейшего исследования возникшей проблемы при определении нормальной реакции приведём с помощью тригонометрических преобразований условие, вызывающее проблему, к виду:

$$f > 2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 + \mathrm{ctg}\,\alpha_0. \tag{13}$$

При этом условии выполняется и условие

$$f > \mathrm{tg}\,\alpha_0. \tag{14}$$

Последнее означает, что реакция стержня, вызванная его растяжением грузом $M_1$ и давящая на ползун под углом $\alpha_0$, будет располагаться внутри конуса трения. Суммарная с силой тяжести ползуна сила $\overline{S} = \overline{R} + m\overline{g}$ тем более будет находиться внутри конуса трения (см. рисунок) и не может вызвать движения ползуна.

Запишем уравнения равновесия ползуна:

$$R\sin\alpha_0 - F = 0, \quad N - mg - R\cos\alpha_0. \tag{15}$$

Перепишем условие (14) в виде $f\cos\alpha_0 > \sin\alpha_0$ и домножим его на величину реакции $R$: $fR\cos\alpha_0 > R\sin\alpha_0$. Неравенство не изменится, если слева добавить положительную величину $fmg$:

$$f(R\cos\alpha_0 + mg) > R\sin\alpha_0. \tag{16}$$

Из уравнений равновесия $R\sin\alpha_0 = F$ и $R\cos\alpha_0 + mg = N$. Подставляя последние выражения в (16), получим $F < fN$, что согласуется с законом трения покоя для ползуна и противоречия законам динамики, как видим, нет. Следовательно, если груз $M_1$ отпустить без начальной скорости с начальным углом $\alpha_0$, удовлетворяющим условию

$$f\sin\alpha_0\cos\alpha_0 > 1 + \sin^2\alpha_0,$$

то точка $M$ (ползун) будет оставаться неподвижной, так как реакция стержня будет всё время находиться внутри конуса трения, и механическая система будет двигаться как простой математический маятник, уравнение движения которого получается из равенства (5) при неподвижной точке $M$ :

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0.$$

При этом из равенств (3) и (5), выражающих принцип Даламбера-Лагранжа при равновесии ползуна получим выражения для силы трения:

$$F = m(g\cos\alpha + l\dot{\alpha}^2)\sin\alpha.$$

Нормальная реакция стержня из (6) будет равна

$$N = mg(1+\cos^2\alpha) + ml\dot{\alpha}^2\cos\alpha.$$

При малом начальном угле $\alpha_0$ имеем уравнение малых колебаний математического маятника:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0,$$

решение которого при начальном условии $\dot{\alpha}_0 = 0$ равно $\alpha = \alpha_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t.$ При прохождении маятником положения равновесия ($\alpha$=0) сила трения $F$=0 и при дальнейшем движении маятника меняет направление на противоположное.

Следует отметить, что функция $\psi = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 + \mathrm{ctg}\,\alpha_0$ имеет минимум равный 2,83 при $\alpha_0 \approx 35^\circ$. Следовательно, условие (13) выполняется только при очень большом коэффициенте трения $f > 2{,}83$.

Если коэффициент трения $f < \mathrm{tg}\,\alpha_0$, то выполняется и неравенство $f < 2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 + \mathrm{ctg}\,\alpha_0$. Ползун в этом случае придёт в движение, и механическая система будет двигаться как эллиптический маятник.

Таким образом, в работе доказано, что явление «парадокса» в исследованной механической системе связано с попаданием давящей на ползун силы в конус трения. Показано, что условие, определяющее так называемую «парадоксальную» область отсутствия, либо двойственности решения в задаче определения движения системы, имеет механический смысл и равносильно условию попадания давящей на ползун силы в конус трения покоя и, следовательно, условию покоя ползуна. Тем самым найден также ответ на вопрос, почему при одних условиях «парадокс» возникает и не возникает при других условиях с достаточно малым коэффициентом трения.

**Summary**

***The paradoxical domain of nonexistence or double solution for the problem on definition of the motion of elliptical pendulum with registration the empirical dry Coulomb friction law is being investigated in this paper. It has been revealed that the parametric condition this domain definition has the mechanical meaning, which does agree with static friction low for the slider of pendulum.***

***Keywords*: *elliptical pendulum, dry friction, Painleve paradoxes, principle of D'Alembert – Lagrange.***

**Литература**

1. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1885, 111 p. Пер. с фр.: Пэнлеве П. Лекции о трении. М: Гостехиздат, 1954. 316 с.

2. Хакимуллина Л.Ш., Скимель В. Н. К динамике систем с сухим трением в примере Пэнлеве-Клейна // Вестник Казан. гос. техн. ун-та им. А. Н. Туполева. 2003. № 4. С. 42-44.

3. Хакимуллина Л. Ш. О некоторых особенностях учета сил трения в динамике механизмов // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2014. №1-2. С. 96-101.

4. Appel P. Traité de mécanique rationnelle. Tome deuxieme.Dynamique des system`es mécanique analytique. Paris: Gauthier-villars, éditeur, 1953. Пер. с фр.: Аппель П. Теоретическая механика. Т 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

***Поступила в редакцию*** ***25 апреля 2016 г.***

***Хакимуллина Лариса Шарифовна*** – канд. тех. наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин» (ДПМ) Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ). Тел. (843) 519-43-28. E-mail: hackimullina.lara@yandex.ru, kgeu@kgeu.ru.