

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРАНСФОРМАТОРАХ

Н.Г. БАЖЕНОВ, И.С. АНТИПАНОВА

Казанский государственный энергетический университет

*Рассматривается влияние петли Гистерезиса на динамические свойства трансформатора.*

*Ключевые слова: энергия электрических потерь, статические индуктивности.*

Экспериментальные данные, приведенные в работе [1], не согласуются с уравнениями трансформатора [1], которые используются в настоящее время для описания в них электромагнитных процессов.

В статье не рассматривается влияние петли Гистерезиса на динамические свойства трансформатора ( $T_p$ ) – предполагается, что она достаточно узкая и совпадает с основной кривой намагничивания.

На рис. 1 изображена схема лабораторной установки, которая использовалась в экспериментах с трансформаторами. Все значения сохранены. На этот раз в качестве испытуемого трансформатора использовался  $T_p$  типа ТН 56-220-50.

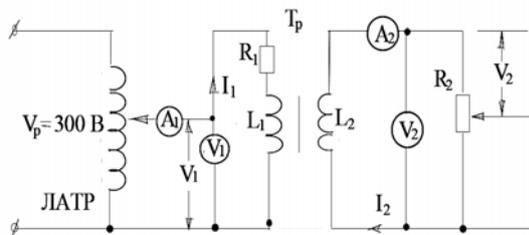


Рис. 1 Схема испытываемого трансформатора

В таблице приведены экспериментальные данные для двух напряжений – 140 В и 220 В, при активной нагрузке.

Таблица

Экспериментальные исследования

$U_1$	$I_1$	$U_2$	$R_2$	$I_2$	$\omega L_1$	$L_1$	$\omega L_2$
140	0,024	18,0	0	0	4137,11	13,175	
	0,072	17,2	33	0,525	1373	4,392	23,24
	0,137	16,6	16,5	1,02	724,75	2,31	11,542
	0,21	16,0	11,0	1,7	472,8	1,505	6,675
	0,28	15,2	8,25	2,163	334,61	1,13	4,984
	0,36	14,2	6,6	2,25	275,81	0,278	4,476
220	0,05	28,2	0	0	3120,56	9,938	
	0,124	27,2	33	0,825	1252,3	4,0073	23,38
	0,22	26,1	16,5	1,57	709,82	2,259	11,79
	0,31	25,2	11,0	2,3	503,32	1,603	7,77
	0,42	24,2	8,25	2,95	371,5	1,183	5,818
	0,55	23,2	6,6	3,65	283,69	0,9035	4,508

Приведенные данные еще раз свидетельствуют о том, что индуктивные сопротивления обмоток  $Tp$  не являются постоянными величинами даже для одного и того же напряжения. Это означает, что уравнение  $Tp$  в форме [1], т.е.:

$$U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + M_{21} \frac{di_2}{dt}; \quad (1)$$

$$U_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2,$$

где  $U_1, U_2, i_1, i_2$  – переменные напряжения и токи в соответствующих обмотках;  $L_1, L_2$  – индуктивности;  $R_1, R_2$  – активные сопротивления;  $M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$  – коэффициенты взаимной индуктивности. (В дальнейшем, в силу равенства  $M_{12} = M_{21}$ , индексы  $M_1, M_2$  опускаются).

Индексы 1, 2 указывают на принадлежность параметров к соответствующим обмоткам, являются не полными. Они составлены с отступлением от экспериментов и выводов по ним М.Фарадея; первые члены в правой части системы (1) должны быть записаны в виде  $\frac{d\psi_1}{dt}$ ;  $\frac{d\psi_2}{dt}$ , где  $\psi = iL$  – потокосцепление.

По Фарадею система уравнений (1) должна быть записана в виде:

$$U_1 = (L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_1}{dt}) + i_1 R_1 + M \frac{di_2}{dt}; \quad (2)$$

$$U_2 = -M \frac{di_1}{dt} = (L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dL_2}{dt}) + i_2 R_2.$$

Выражениям, стоящим в круглых скобках, можно дать физическую интерпретацию: первые члены связаны с преобразованием электрической энергии в магнитную, вторые – с фиксированием (запоминанием) энергии магнитного поля при нарастании тока и с преобразованием магнитной энергии в электрическую при его убывании. Последнее явление замечено в процессе экспериментальных исследований, о нем упоминается в работе [2], т.е. это уже факт.

Нетрудно представить, что в какое-то мгновение  $t$  сумма членов в круглых скобках будет равна нулю, например, для первого уравнения:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -i_1 \frac{dL_1}{dt}, \text{ или } \frac{di_1}{i_1} = -\frac{dL_1}{L_1}. \quad (3)$$

Интегрируя выражения (3) от их минимальных значений до максимальных, с учетом, что нарастанию (уменьшению) токов в обмотках всегда противодействует индуктивность, в итоге получим

$$\ln \left| \frac{i_{1m}}{i_1} \right| = \ln \left| \frac{L_{1m}}{L_1} \right|. \quad (4)$$

Согласно (4), задача в целом является нелинейной, но используя за точки сшивания минимальные и максимальные значения параметров (при нарастании тока происходит запасание энергии, а при его максимуме запасание заканчивается. Затем картина повторяется, но в обратном порядке.), она линеаризуется. Другое дело, если представить ток в первичной обмотке изменяющимся по закону  $i_1 = I_m \sin \omega t$ , то выражение для тока (4) является невыполненным, поскольку оно связано с её модулем, т.е. в этом случае необходима постоянная составляющая тока.

Из механики известно (эффект Магнуса): два колебания одной и той же частоты порождают постоянную составляющую, т.е.

$$A \cdot \sin \omega t \cdot \cos(\omega t + \gamma) = \frac{1}{2} A [\sin(2\omega t + \gamma) - \sin \gamma],$$

где  $A, \gamma$  – постоянные величины.

В рассматриваемом случае по гармоническому закону изменяются и ток, и индуктивность обмотки. Причем их роли меняются через полупериод ( $T/2$ ): в течение полупериода, когда ток нарастает от своего минимального значения до максимального, происходит накопление энергии магнитного поля – индуктивность уменьшается; при уменьшении тока (в следующий полупериод  $T/2$ ) накопленная энергия магнитного поля расходуется на воспрепятствование уменьшению тока и т.д.

Таким образом, если ток представить в виде

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (5)$$

то индуктивность должна быть представлена в форме

$$L_1 = L_0(1 + \cos \omega t) = L_0 2 \cos^2 \frac{\omega t}{2}, \quad (5')$$

где  $L_0$  – значение индуктивности в рабочей точке (а) на кривой намагниченности (рис. 2).

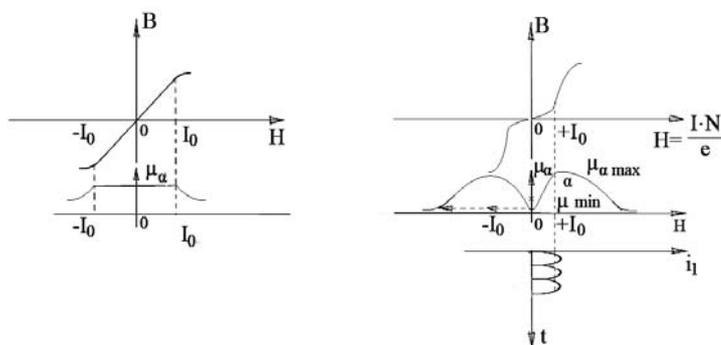


Рис. 2. Кривые намагничивания

Подставив указанные решения (5, 5') в систему уравнений (2), получим постоянные члены  $I_{m1}L_1\omega$  и  $I_{m2}L_2\omega$ . Они имеют одинаковое отношение и к токам, и к индуктивностям. С позиции «Теории автоматического управления» (ТАУ) постоянные составляющие создают смещение. Поскольку первообразующим в  $Tr$  является ток, то после подстановки в (2) решений (5, 5'), получим систему уравнений в виде:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \omega L_1 + M \frac{di_2}{dt} = U_1; \quad (6)$$

$$M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \omega + i_2 R_2 = 0,$$

где активное сопротивление обмоток ( $R_1', R_2'$  рис. 1) из рассмотрения исключены.

На основании анализа системы уравнений (6) можно сделать несколько замечаний:

во-первых, в преобразовании электрической энергии в магнитную, и наоборот, участвуют реальные токи, протекающие по обмоткам. Активные сопротивления обмоток  $Tr$   $R_1', R_2'$  оказывают влияние на значения токов, но непосредственного участия в преобразовании энергий не принимают. Они создают потери энергии в  $Tr$ , которые как-то уменьшить схемным решением невозможно. Поэтому с целью сокращения записи в системе (6) они отсутствуют;

во-вторых, во втором уравнении (6)  $i_2 R_2$  означают падение напряжений на последовательно включенных сопротивлениях. Однако, согласно рис. 1, сопротивление нагрузки  $R_2$  подключено параллельно вторичной обмотке, т.е.

$$i_2 R_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \omega.$$

Чтобы согласовать второе уравнение (6) с экспериментальными данными, достаточно представить, что во вторичной цепи указанные сопротивления действительно включены последовательно, а в их разрыве действует ЭДС  $E_2$ , равная

$$E_2 = 2M \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

В этом случае и на обмотке  $L_2$ , и на резисторе  $R_2$  будет одно и то же падение напряжения  $U_2$ .

С учетом всех приведенных замечаний система уравнений (6) примет вид:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \omega L_1 + M \frac{di_2}{dt} &= U_1; \\ M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \omega &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения  $Tr$  в форме (7) приводятся впервые и, естественно, породят немало сомнений. Вместе с тем, в работе [2] авторы в экспериментальном плане, на основании анализа кривых намагничивания (рис. 2 а, б) для магнитопроводов (МП), выполненных из пермаллоя (рис. 2, а) и трансформаторной стали (рис 2, б), – сделали вывод, что зависимости между магнитной индукцией  $B$  и напряженностью магнитного поля  $H$  для электромагнитных цепей, порожденной переменным током, гораздо сложнее, чем это предполагается в настоящее время.

Проведенные экспериментальные исследования подтвердили предположения авторов [2] и справедливость системы уравнений (7):

во-первых, смещение по фазе между токами и напряжениями (при любых их значениях) в первичной обмотке близки к  $45^\circ$ , что невозможно объяснить значением их активного сопротивления, ибо  $\omega L_1 \gg R_1$ ;

во-вторых, абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_\lambda$ , с которой непосредственно связана индуктивность:

$$L = N^e \mu_\lambda \frac{s}{l},$$

где  $N$  – число витков в обмотке;  $s, l$  – площадь сечения и средняя длина магнитопровода (МП), – всегда положительна.

Расположение в правой или левой полуплоскостях (рис. 2) относительно оси магнитной индукции  $B$  определяется начальной фазой тока в обмотке.

Результаты экспериментальных исследований (см. таблицу) также показывают, что  $Tr$  представляет собой систему автоматического управления (САУ), обладающую свойствами самонастройки – индуктивности обеих обмоток однозначно связаны с нагрузкой  $R_2$ .

Вопрос «Каким образом и когда в МП появляется постоянная составляющая намагниченности?» – пока остается открытым. Для его выяснения решим систему уравнений (7).

С целью упрощения решения запишем уравнения (7) в форме преобразования Лапласа, т.е.

$$I_1(s)L_1s + I_1(s)L_1\omega + I_2(s)Ms = U_1(s); \quad (8)$$

$$I_1(s) \cdot Ms + I_2(s)L_2s + I_2(s)L_2\omega = 0,$$

где  $s$  – оператор Лапласа.

Для сокращения записи оператор  $s$  при переменных в последующем будет опущен.

Из (8) следует:

- определитель системы  $\Delta = L_1L_2\omega(2s + \omega)$ ;

- частные определители:  $\Delta I_1 = U_1L_2(s + \omega)$ ;  $\Delta I_2 = -U_1Ms$ .

Откуда

$$I_1 = \frac{U_1(T_0S + 1)}{L_1\omega(T^2S^2 + 2\xi TS + 1)}; I_2 = \frac{U_1s}{\sqrt{L_1L_2}\omega^2(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)}; \frac{I_2}{I_1} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{s}{(T_0s + 1)}, \quad (9)$$

где  $T_0 = \frac{1}{\omega}$ ;  $T_1 = \frac{1}{\omega}$ ;  $T = \frac{\sqrt{2}}{\omega}$ ;  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$  – декремент колебаний.

Согласно теории автоматического управления, значение  $\xi=0,707$ , соответствует оптимальному значению.

Приведенные символы величин  $T_0, T_1, T, \xi$  из выражения (9) в целом приведены без учета активных сопротивлений обмоток  $Tr$ . Они жестко связаны с параметрами  $Tr$  и все время остаются постоянными. Что касается активных сопротивлений обмоток, то, поскольку они оказывают косвенное влияние на преобразование электрической энергии в магнитную и на оборот, их проще учитывать через падения на них напряжений.

Если предположить, что во временной области напряжение в первичной обмотке  $Tr$  изменяется по закону

$$U_1(t) = U_m \cdot \sin \omega t,$$

где  $U_m$  – амплитудное значение напряжения, чему в изображении по Лапласу соответствует выражение, т.е.

$$U_1(t) \leftarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \bullet \end{array} U_1(s) = U_m \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

В этом случае токи, протекающие по обмоткам  $Tr$ , выразятся зависимостями:

$$I_1 = \frac{U_m}{L_1\omega} \cdot \frac{(1 + T_0s)}{(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)(s^2 + \omega^2)}; I_2 = \frac{U_m}{\sqrt{L_1L_2}\omega} \cdot \frac{s}{(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)(s^2 + \omega^2)}. \quad (10)$$

Воспользовавшись теоремой Бороля (смещения) [2], нетрудно перейти от изображения по Лапласу во временную область.

В форме общей записи решения имеют громоздкий вид. Однако с учётом жесткой связи символов формул (9÷11) с параметрами  $Tr$ , например,  $\frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\omega}{2} = \omega_1$

– частота собственных колебаний, или  $\frac{\xi}{T} = \frac{\omega}{2}$  и т.д., – конечные формульные зависимости во временной области принимают вполне обозримый вид.

В частности, для тока холостого хода  $Tr$   $i_0$ :

$$i_0(t) = \frac{U_m}{2 \cdot L_1\omega} \left\{ -\sin(\omega t - 45^\circ) + e^{-\frac{1}{11}t} \sin(2\omega t + 45^\circ) \right\}, \quad (11)$$

для тока в первичной цепи  $Tr$ :

$$i_1(t) = \frac{U_m}{2\sqrt{1-\xi^2} \cdot L_1\omega} \left\{ -0,89 \sin(\omega t - 108^\circ 30') - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{T}t} \left[ \sin \left[ (2\omega + \omega_1)t + 71^\circ 30' \right] - \sin \left[ (2\omega - \omega_1)t + 45^\circ \right] \right] \right\},$$

для тока во вторичной цепи  $Tr$ :

$$i_2(t) = \frac{-U_m}{2\sqrt{1-\xi^2} \cdot \sqrt{L_1 L_2} \omega} \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \sin \left[ (2\omega + \omega_1)t + 71^\circ 30' \right] - \sin \left[ (2\omega - \omega_1)t + 45^\circ \right] \right], \quad (13)$$

где  $U_m = \sqrt{2}U_1$ ;  $U_1$  – действующее напряжение (табл.1), приложенное к первичной обмотке  $Tr$ .

Если в выражения (11÷13) подставить экспериментальные данные из табл.1, например значения  $L_1\omega$ ,  $L_2\omega$  и действующие значения напряжения  $U_1 = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ , то

получим значения токов  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_0$ , близкие к экспериментальным данным. Отклонения объясняются неучетом активных сопротивлений обмоток  $Tr$ . Их влияние проще рассчитать через падения на них напряжения, используя зависимость

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{I_2 U_1}{I_1 U_2}, \quad (14)$$

приведенную в работе [3]. В этой формуле все параметры  $Tr$  записаны в действующих значениях.

Из полученных выражений (11÷13) можно сделать следующие выводы:

- во-первых, несмотря на то, что в  $Tr$  приходится иметь дело с индуктивными элементами, тем не менее при их включении всегда будут отмечаться скачки токов, особенно при подключенной нагрузке  $R_2 \neq \infty$  (рис.1). Причем, чем меньше эта нагрузка по абсолютной величине, тем больше будут скачки токов. Это явление можно объяснить стремлением устройства ( $Tr$ ) в целом к максимально возможному накоплению энергии магнитного поля и за короткое время. Декремент колебаний в системе ( $\xi = 0,707$ ) является (при любой нагрузке) оптимальным. Это означает, что за 1–1,5  $T$  переходный процесс закончится; и за это время должна быть накоплена постоянная составляющая магнитного поля, относительно которой будут происходить последующие колебания;

- во-вторых, переходный процесс представляет собой наложение собственной частоты  $\frac{1}{T} \sqrt{1-\xi^2}$  на вторую гармонику вынужденной частоты  $\omega$ , т.е. в переходном процессе токи изменяются не только по амплитуде, но и по частоте. Иначе говоря, в целом процесс является нестационарным.

Вторая гармоника  $2\omega$  представляет собой энергетическую составляющую – преобразование электрической энергии в магнитную и на оборот происходит именно на второй гармонике. С ней связано появление в системе уравнений (8) дополнительных членов  $L_1\omega$ ,  $L_2\omega$ . Они представляют собой как бы «запоминающие» устройства, относительно которых происходят энергетические колебания – по законам:

$\sin^2 \omega t$  – электрические преобразования;  $\cos^2 \omega t$  – магнитные преобразования, которые в сумме дают единицу;

- в-третьих, согласно выражениям (11,12) отношение комплексов токов  $\dot{I}_2, \dot{I}_1$  в уставившемся режиме работы  $Tp$  – есть величина постоянная, т.е.:

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \frac{I_{m2}}{I_{m1}} \cdot \frac{e^{-j135^\circ}}{\sqrt{2}}, \quad (15)$$

где  $I_{m1}, I_{m2}$  – амплитудные значения токов, которые рассчитываются по уравнениям (12,13) для установившегося процесса.

Выражение (15) соответствует (9), которое получено в общем виде.

Из выражений (11-13) и (15) следует, что если указанные величины представить в векторной форме, принимая за базу вектор приложенного к первичной обмотке напряжения, можно видеть токи в обмотках смещены по отношению друг к другу и по отношению вектора напряжения. Причем эти смещения постоянные и не зависят ни от значений нагрузок, ни от каких-то других факторов. Декремент колебаний всегда остается оптимальным. Это обстоятельство указывает на то, что токи, протекающие по обмоткам  $Tp$ , кроме продольной (полезной) составляющей магнитного потока создают односторонние поперечные составляющие. Они порождают токи Фуко и в обмотках  $Tp$ , и в магнитопроводе, порождая дополнительные потери.

Их нетрудно рассчитать. Для этого предварительно необходимо ток во вторичной обмотке привести к току первичной обмотке.

В итоге получим

$$I_1^2 (\sin 71^\circ 30' - \sin 26^\circ 30')^2 \cdot L_1 \omega = P_L, \quad (16)$$

где  $P_L$  – мощность индуктивных потерь, или потерь в стали.

Подстановка экспериментальных данных из таблицы в выражение (16) показывает, что индуктивные потери вполне соизмеримы с активными. И если с последними бороться практически невозможно, кроме использования обмоток с малым активным сопротивлением, то индуктивные, как показывают эксперименты, можно существенно уменьшить.

#### **Выводы**

Токи, протекающие по обмоткам  $Tp$ , кроме продольной (полезной) составляющей магнитного потока, создают односторонние поперечные составляющие. Они порождают токи Фуко и в обмотках  $Tp$ , и в магнитопроводе, порождая дополнительные потери. Индуктивные потери вполне соизмеримы с активными. И если с активными бороться практически невозможно, кроме использования обмоток с малым активным сопротивлением, то индуктивные, как показывают эксперименты, можно существенно уменьшить.

#### **Summary**

*The influence of the hysteresis loop on the dynamic properties of the transformer.*

*Keywords: energy electrical losses, static inductance.*

#### **Литература**

1. Тихомиров П.М. Расчет трансформаторов. М: Энергоатом-издат, 1986. 490с.
2. Ермаков И.И., Киселев В.В. Обобщенная теория электрических и магнитных цепей. Казань: КВКАУ, КГЭУ, 2007.126с.
3. Ермаков И.И., Антипанова И.С. Результаты экспериментальных исследований маломощных трансформаторов под нагрузкой // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2014. №1-2. С.74-80.

4. Рыбаков Р.Б., Аллямова Н.М., Хуснутдинов А.Н. Применение итерационных методов при проектировании электрических машин // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. 2014.

*Поступила в редакцию*

*22 октября 2014 г.*

**Баженов Николай Георгиевич** – канд. техн. наук, доцент Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ).

**Антипанова Ирина Сергеевна** – ассистент Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ). Тел: 8(960)0336884. E-mail: antipanova\_irina@mail.ru.