

ВЛИЯНИЕ СИЛЫ БАССЭ НА НАПРАВЛЕНИЕ ДРЕЙФА ВКЛЮЧЕНИЯ В СТОЯЧЕЙ ВОЛНЕ

ГУБАЙДУЛЛИН Д.А., ОСИПОВ П.П., ЗАКИРОВ А.Н

ИММ КазНЦ РАН

Исследован дрейф включения в стоячей синусоидальной волне при различных числах Рейнольдса и Струхала под действием сил вязкости, присоединенных масс, Архимеда и Бассэ. Показано, что для заданной плотности включения при увеличении частоты стоячей волны рано или поздно достигается пороговое значение частоты, выше которого волновая сила меняет направление. Для различных чисел Рейнольдса и Струхала найдены зависимости квадрата порогового коэффициента увлечения от относительной плотности включения, с учетом и без учета силы Бассэ. Установлено существование порогового значения относительной плотности включения. При переходе плотности включения через пороговое значение направление волновой силы меняется. Исследовано влияние силы Бассэ на пороговое значение относительной плотности включения. Показано, что учет силы Бассэ оказывает особенно сильное влияние на пороговые кривые для неплотных включений. При увеличении числа Струхала пороговое значение плотности включения уменьшается.

Ключевые слова: дрейф частицы, волновое поле, сила Бассэ.

Введение. В акустических полях на включение действуют различные силы: Стокса, силы типа Озеена, силы Архимеда и присоединенных масс, а также сила Бассэ, Магнуса и другие. Осцилляции несущей среды могут вызвать дрейф включения. Этот эффект широко используется в волновых технологиях очистки и коагуляции. Общие вопросы дрейфа включений в акустических полях достаточно хорошо исследованы. В литературе [1, 2] описана математическая модель динамики частицы без обратного влияния на динамику несущей фазы. В работах [3,4] исследован дрейф включения в стоячей синусоидальной волне несущей среды $v_1 = U(x) \sin \omega t$, $U(x) = U_0 \sin \pi \frac{x}{L}$ при

малых числах Рейнольдса под действием сил вязкости, присоединенных масс и силы Архимеда. Показано, что в стоячей волне при малых частотах преобладает волновая сила, вызванная вязким трением. В этих режимах неплотные включения дрейфуют в сторону пучности стоячей волны, а плотные – к её ближайшему узлу. При больших частотах преобладает волновая сила, вызванная инерцией, а направление дрейфа меняется. В работе [5] показано, что при больших числах Рейнольдса также происходит смена направления результирующей волновой силы при превышении пороговой частоты. Для определения направления волновой силы удобно использовать диаграммы пороговых значений $\mu_p^2(D)$ (квадрат порогового коэффициента увлечения $\mu_p^2 = 1/(1 + (\omega\tau)^2)$) в зависимости от числа плотности включения D , при переходе через которые направление результирующей волновой силы меняется на противоположное.

© Д.А. Губайдуллин, П.П. Осипов, А.Н. Закиров
Проблемы энергетики, 2015, № 1-2

Построены универсальные диаграммы «пороговых» кривых $\mu_p^2(D)$ при различных числах Рейнольдса и Струхала. При увеличении чисел Рейнольдса и Струхала пороговые значения $\mu_p^2(D)$ заметно уменьшаются, т.е. пороговые частоты возрастают. В [6] предложено использовать диаграммы ускорения дрейфа. В работе [7] исследовано изменение направления дрейфа включения в периодической ударной волне в резонаторе.

Несмотря на большое количество исследований дрейфа включения, вопрос о влиянии силы Бассэ на направление дрейфа включения изучен слабо и является целью настоящей работы.

Постановка задачи. Система уравнений динамики включения без учета сил гравитации имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= v_2, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{v_2 - v_1}{\tau} \left(1 + \frac{1}{6} \sqrt{\text{Re}} + \frac{1}{60} \text{Re} \right) + D \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{\tau_\mu}}{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{dv_2}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}, \end{aligned}$$

где x_2 , v_2 – положение и скорость включения; $\text{Re} = \rho_1 |v_1 - v_2| \frac{2r}{\mu}$ – относительное

число Рейнольдса, r – радиус включения; $D = \frac{3\tilde{\rho}}{2 + \tilde{\rho}}$ – безразмерный параметр,

$\tilde{\rho} = \rho_1/\rho_2$ – относительная плотность несущей среды; $\tau_v = 2/9 r^2 \rho_2 / \mu = 2/(9 \tilde{\rho}) \tau_\mu$ – время релаксации включения для стокового режима обтекания; τ_μ – время установления стокового режима обтекания; $\tau = (1 + 0,5 \tilde{\rho}) \tau_v = \tau_\mu / (3D)$ – время релаксации включения с учетом присоединенных масс. В настоящей работе ограничимся исследованием дрейфа в плоской стоячей волне.

Обезразмеривание. Вводя безразмерные величины

$$x_2^* = \frac{x_2}{L}, \quad v_1^* = \frac{v_1}{U_0}, \quad v_2^* = \frac{v_2}{U_0}, \quad t^* = \omega t, \quad \theta^* = \omega \theta,$$

число Струхала $\text{Sr} = \frac{\omega L}{U_0}$ и опуская звездочку, динамика включения описывается

задачей Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\text{Sr}} v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{3D}{K} \left(1 + \frac{1}{6} \sqrt{\text{Re}} + \frac{1}{60} \text{Re} \right) (v_2 - v_1) + \\ \quad + D \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{\text{Sr}} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{3D}{\sqrt{K}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{v_2}{\text{Sr}} \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{dv_2}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \\ x_2(0) = 0,75, \quad v_2(0) = 0, \quad v_1(x, t) = \sin(\pi x) \sin t, \end{cases}$$

где $K = \omega r^2 / \nu$, $\text{Re} = \text{Re}_0 |v_2 - v_1|$, $\text{Re}_0 = \rho_1 U_0 2r / \mu$.

Поиск пороговых кривых. Численные эксперименты показали, что в нестоксовом инерционном режиме обтекания также возникает смена направления волновой силы при превышении пороговой частоты. Поэтому представляет интерес получение кривых для безразмерной пороговой частоты ωt при различных значениях Re_0 и относительных плотностей флюида $\tilde{\rho}$. В настоящей работе, однако, вместо этого определяется пороговое значение μ_p^2 в зависимости от числа плотности D . Преимуществом координат D, μ_p^2 перед координатами $\tilde{\rho}, \omega t$ является ограниченность области диаграммы ввиду условий $0 \leq D \leq 3, 0 \leq \mu_p^2 \leq 1$. Для чисел $Re_0 = 0,01; 10; 100$ и различных чисел Струхала для каждого из значений $D = 0,01; 0,02; \dots; 2,99; 3,0$ находилось пороговое значения μ_p^2 , при переходе через которое включение меняло направление дрейфа. Решалось семейство задач о дрейфе включения из стандартного положения $x_2(0) = 0,75, v_2(0) = 0$ при различных частотах, и по знаку средней скорости в течение первых десяти периодов определялось направление дрейфа. Сначала оно определялось для малых $\omega t = 0,01$. Далее безразмерная частота колебаний увеличивалась до тех пор, пока не происходила смена направления дрейфа. Таким образом, находились пороговые значения μ_p^2 , при переходе через которые включение меняло направление дрейфа.

Численные эксперименты. Учет силы Бассэ резко увеличивает время численного расчета. В связи с этим было проведено распараллеливание вычисления интеграла Дюамеля:

$$I\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\theta) d\sqrt{t-\theta}$$

с помощью библиотеки MPI. Распараллеливание проводилось на трех компьютерах, объединенных локальной сетью. В каждом узле $t_n = n \Delta t$ область интегрирования разбивалась на три примерно равные части

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k_1 \Delta t} f(\theta) d\sqrt{t_n - \theta} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{k_1 \Delta t}^{k_2 \Delta t} f(\theta) d\sqrt{t_n - \theta} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{k_2 \Delta t}^{t_n} f(\theta) d\sqrt{t_n - \theta}.$$

Каждый из интегралов вычислялся по формуле трапеций. Например, второй интеграл

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{k_1 \Delta t}^{k_2 \Delta t} f(\theta) d\sqrt{t_n - \theta} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{f_{k-1} + f_k}{2} (\sqrt{t_n - t_k} - \sqrt{t_n - t_{k-1}}) \\ &= \sqrt{\frac{\Delta t}{\pi}} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} \frac{f_{k-1} + f_k}{\sqrt{n-k} + \sqrt{n-(k-1)}}. \end{aligned}$$

Распараллеливание позволило увеличить скорость вычислений в 4 раза.

Расчеты показывают, что для заданной плотности включения при увеличении частоты стоячей волны ω достигается пороговое значение квадрата коэффициента увлечения μ_p^2 , при переходе через которое волновая сила меняет свое направление на противоположное. На рис. 1 и 2 показаны семейства зависимостей порогового значения

μ_p^2 от числа плотности D при различных числах Струхала для стокова режима без учета и с учетом сил Бассэ.

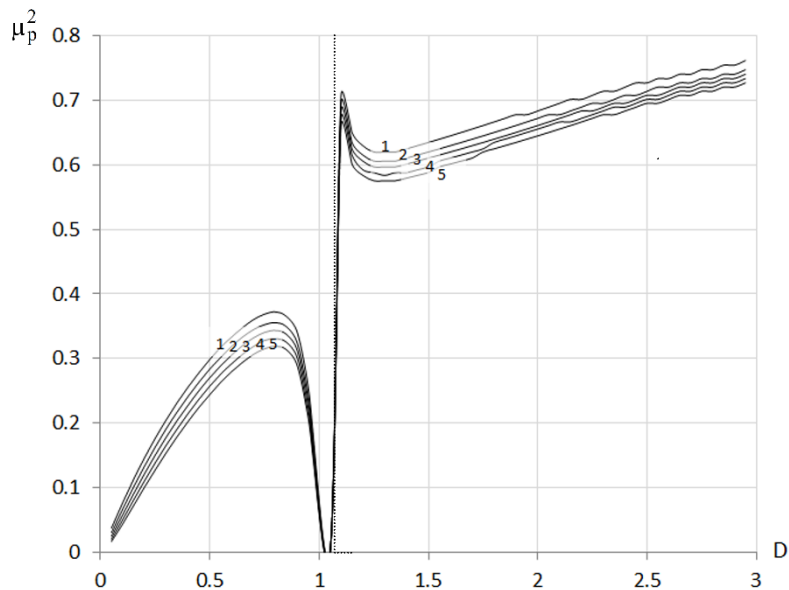


Рис. 1. Зависимость порогового значения от числа плотности. Без учета силы Бассэ.
 $Re_0=0,01$, $Sr=10(1)$, $20(2)$, $30(3)$, $40(4)$, $50(5)$

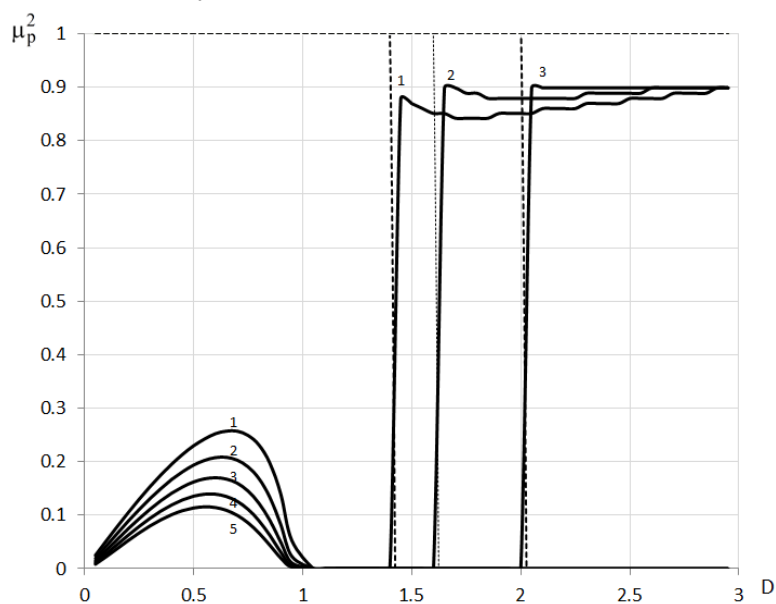


Рис. 2. Зависимость порогового значения от числа плотности. С учетом силы Бассэ.
 $Re_0=0,01$, $Sr=10(1)$, $20(2)$, $30(3)$, $40(4)$, $50(5)$

Без учета силы Бассэ для всех пороговых кривых существует единое пороговое значение числа плотности, при переходе через которое меняется направление волновой силы. Учет силы Бассэ приводит к возникновению разных пороговых значений числа плотности.

На рис. 3 и 4 показаны семейства зависимостей порогового значения μ_p^2 от числа плотности D при различных числах Струхала для нестоксова режима без учета и с учетом силы Бассэ.

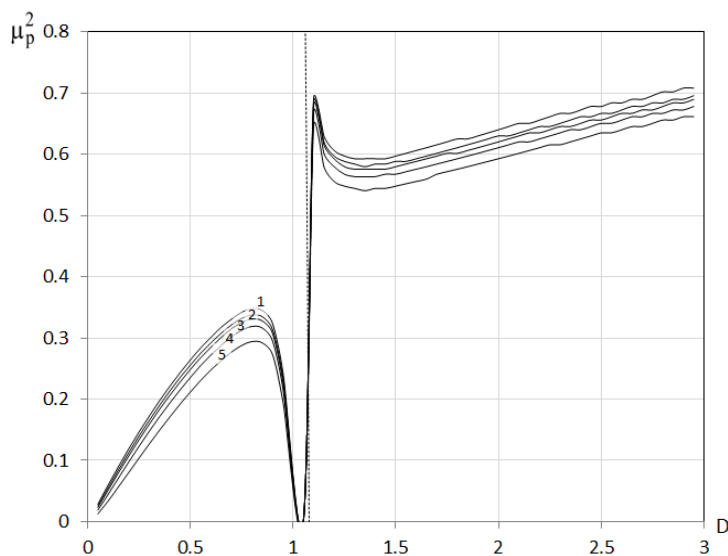


Рис. 3. Зависимость порогового значения от числа плотности. Без учета силы Бассэ.
 $Re_0=10$, $Sr=10(1)$, $20(2)$, $30(3)$, $40(4)$, $50(5)$

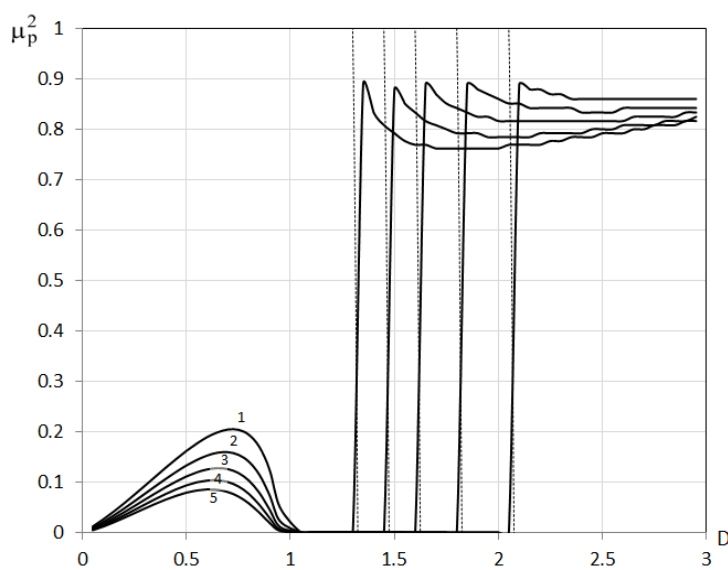


Рис. 4. Зависимость порогового значения от числа плотности. С учетом силы Бассэ.
 $Re_0=10$, $Sr=10(1)$, $20(2)$, $30(3)$, $40(4)$, $50(5)$

На рис. 5 и 6 показаны семейства зависимостей порогового значения μ_p^2 от числа плотности D при различных числах Струхала для нестоксова режима при большом числе Рейнольдса $Re_0=100$ без учета и с учетом сил Бассэ.

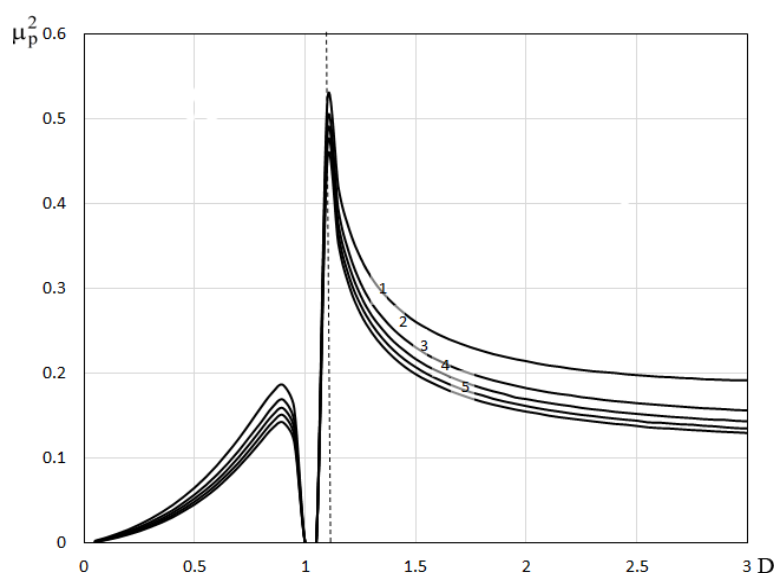


Рис. 5. Зависимость порогового значения от числа плотности. Без учета силы Бассэ.
 $Re_0=100$, $Sr=10(1)$, $20(2)$, $30(3)$, $40(4)$, $50(5)$

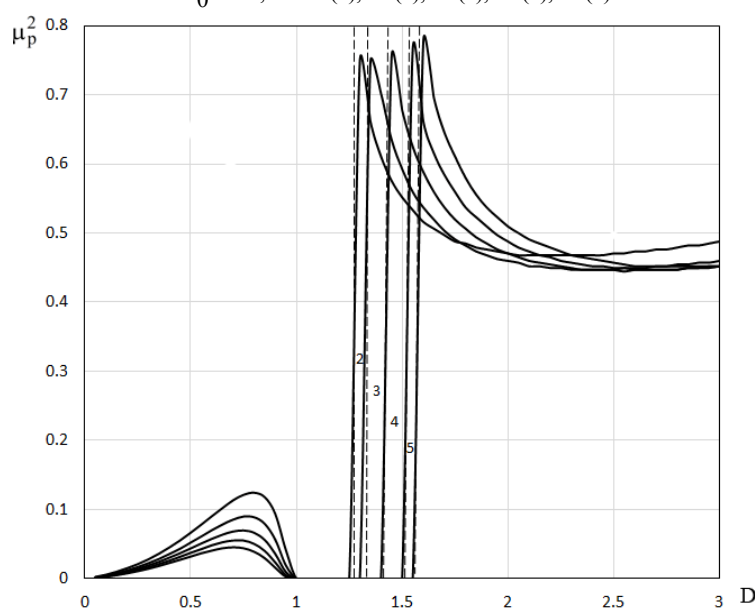


Рис. 6. Зависимость порогового значения от числа плотности. С учетом силы Бассэ.
 $Re_0=100$, $Sr=10(1)$, $20(2)$, $30(3)$, $40(4)$, $50(5)$

Расчеты показывают, что учет силы Бассэ оказывает особенно сильное влияние на пороговые кривые для неплотных включений. При увеличении числа Струхала пороговое значение μ_p^2 для плотных включений уменьшается. Пороговое значение плотности включения уменьшается (число плотности D увеличивается).

Summary

The inclusion drift in a standing sinusoidal fluid-velocity wave at various Reynolds and Strouhal numbers under the action of the viscous force, the virtual mass force, the

© Проблемы энергетики, 2015, № 1-2

buoyancy force and Basset force has been investigated. For a given inclusion density, as the standing wave frequency increases, its threshold value, above which the direction of the wave force reverses, is attained sooner or later. For various Reynolds and Strouhal numbers (with and without Basset force), the dependences of the squared threshold drag coefficient on the inclusion density number have been found. These dependences show that with increasing Reynolds and Strouhal numbers the threshold value of the squared drag coefficient decreases markedly. Basset force influence on a threshold value has been investigated. It has been shown, that Basset force influence most on threshold values of low-density inclusions.

Keywords: *the inclusions drift, wave field, Basset force.*

Литература

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Москва: Наука, 1987. Часть 1, 2.
2. Ганиев Р.Ф. Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технология. Москва: Изд. R&C Dynamics, 2008. 712 с.
3. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Влияние гидродинамических сил на дрейф включений в волновых полях // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2010. №1-2. С.3-13.
4. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. О некоторых режимах дрейфа включений в акустических полях//ИФЖ. 2011. Т.84, №2. С. 255-262.
5. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Влияние чисел Рейнольдса и Струхала на направление волновой силы, действующей на включения в стоячей синусоидальной волне// ИФЖ. 2013. Т. 86. №1. С. 50-58.
6. D.A. Gubaidullin, P.P. Osipov. Diagrams for drift acceleration of inclusion in acoustic field/ Proc. EAC2013, Prague 1-6 sep. 2013.
7. D.A. Gubaidullin, P.P. Ossipov. Numerical simulation of particle drift in acoustic resonator with periodic shock wave/ Applied mathematics and computation, 2013. V. 219, №9, pp. 4535 - 4544.

Поступила в редакцию

18 декабря 2014 г.

Губайдуллин Дамир Анварович – д-р физ. -мат. наук, член-корр. РАН, директор Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН (ИММ КазНЦ РАН). Тел: 8(843)236-52-89. E-mail: gubajdullin@mail.knc.ru.

Осипов Петр Петрович – д-р физ.-мат. наук Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН (ИММ КазНЦ РАН). Тел: 8(903)3882133. E-mail: petro300@rambler.ru.

Закиров Адель Наилевич – магистр 2-года обучения Института механики и математики Казанского Федерального Университета. Тел: 8(937)5996727. E-mail: adel.zakirov@gmail.com.