

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СКОРОСТИ ТУРБУЛЕНТНЫХ И ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ

Л.Э. Меламед¹, Г.А. Филиппов²

¹Закрытое акционерное общество «Интеллект», г. Москва, Россия

²Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления

Российской академии наук, г. Москва, Россия

lev.melamed@yandex.ru

Резюме: На основе решения предложенного ранее уравнения движения (в концепции «вихревой засыпки») получена обобщенная формула для профиля скорости турбулентного и ламинарного течения в трубах. Формула имеет двучленный степенной вид. Полученное решение позволяет рассматривать скорость турбулентного ядра потока, или, точнее, осредненную по времени величину осевой компоненты этой скорости, как сумму трех слагаемых – несущего, параболического и степенного непараболического. Показано, что профиль турбулентной скорости основной части потока описывается именно параболическим слагаемым. Предложено преобразование уравнения движения, в решениях которого как ламинарный, так и турбулентные профили скоростей (в основной части потока) являются прямыми (или очень близкими к ним) линиями. Отмечены некоторые особенности турбулентного течения, сходственные с течениями в зернистом слое.

Ключевые слова: турбулентность, трубы, уравнение движения, внутреннее сопротивление, профиль скоростей, степенная формула.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, проект № 18-08-00051а).

DOI: 10.30724/1998-9903-2018-20-7-8-136-146

THE SUMMARIZED FORMULA FOR VELOCITY OF TURBULENT AND LAMINAR FLOWS IN PIPES

L.E. Melamed¹, G.A. Filippov²

¹Closed joint-stock company "Intelligence", 117246 Moscow, Russian Federation

²Department of power, mechanical engineering, mechanics and control processes of

Russian Academy of Sciences, 119991 Moscow, Russian Federation

lev.melamed@yandex.ru

Abstract: On the basis of the solution of the equation of the movement (in conception of «vortex backfill») offered earlier, the generalized formula for a profile of speed of a turbulent and laminar current in pipes is received. The formula has binomial power shape. The received solution allows to consider speed of a turbulent kernel of a stream, or, more precisely, averaged on time value of axial component of this speed, as the sum of three items - carrying, parabolic and power but not parabolic. It is shown that the profile of turbulent speed of the basic part of a stream is described by the parabolic component. Transformation of the equation of movement in

which solutions both laminar, and turbulent profiles of speeds (in the basic part of a stream) are direct lines (or very close to them) is offered. Some features of turbulent flow, similar to currents in a granular layer are noted.

Keywords: *turbulence, pipes, an equation of motion, interior resistance, a profile of velocities, the power formula.*

Acknowledgments: *This work is fulfilled with financial support of the Russian fund of basic researches (RFFI, the project № 18-08-00051a).*

Введение

Гидродинамика турбулентных течений и течений в трубах имеет как теоретическое, так и большое практическое значение, т.к. этот процесс является, возможно, самым распространенным физическим процессом как в технике вообще, так и в энергетике в частности. Экспериментальное изучение турбулентного течения в трубах, которое имеет достаточно долгую историю, восходящую к работе Никурадзе 1932 года (Геттингенский университет), подверглось в недавнее время очень тщательной перепроверке на специально созданной экспериментальной установке в Принстонском университете [1; 2]. Одновременно ведется и теоретический анализ процесса, связанный с выбором наиболее адекватной (теоретически обоснованной и практически пригодной) формы аппроксимации получаемых экспериментальных данных [3–6]. Обсуждение этой темы велось ранее крупнейшими учеными (Т. фон Карман, Л. Прандтль, Л.Д. Ландау) и ведется сейчас (Г.И. Баренблатт, И.И. Вигдорович и др.) и носит иногда остро-дискуссионный характер. Рассматриваются два закона изменения средней скорости по радиусу канала (точнее – в ядре потока, вне ламинарного подслоя и промежуточного слоя) – логарифмический (универсальный, не зависящий от числа Re) и степенной (неуниверсальный). Авторы в работе [4] утверждают, что «универсальный логарифмический закон не соответствует экспериментальным данным». Автор работы [5] в своем ответе заявляет, что степенная формула из работы [4] справедлива лишь в небольшой части профиля потока. Дискуссия ведется не только в отечественной, но и в мировой литературе (см., например, [3]). Дело в том, что, как отмечается в работе [6], «при внешней простоте постановки, а может быть, и благодаря ей, эта задача позволяет выявить новые свойства явления турбулентности, остающегося сейчас во многом загадкой». Обсуждение носит физико-теоретический характер, поскольку получить аналитическое (пусть и приближенное) решение уравнения Навье-Стокса для турбулентного движения не представляется возможным. Поскольку получение такого решения означало бы продвижение в изучении вопроса и расширило бы наше понимание сути процесса, а также дало бы аргументы в пользу одной из точек зрения в этой дискуссии, были предприняты попытки модернизации уравнения Навье-Стокса. Эта модернизация представляет собой введение в уравнение одного или нескольких дополнительных членов, отвечающих за внутреннее распределенное сопротивление. Наиболее близкой по тематике к данному методу является работа [7]. В этом исследовании в правую часть уравнения Навье-Стокса добавлена сила сопротивления в виде бесконечного степенного ряда по скоростям с коэффициентами, определяемыми по экспериментальным данным. В отличие от этой работы в данной статье используется модернизация уравнения турбулентного движения в трубе, предложенная в статье [8] и основанная на других физических предположениях, а именно: на представлении о турбулентности как течении через «вихревую засыпку». Она включает только один член и не содержит эмпирических параметров, а численное решение полученного уравнения близко соответствует экспериментальным данным. В качестве эталонных данных выбраны

формула Рейхардта [9]. Данная работа позволит прояснить суть физического механизма формирования профиля скорости турбулентного движения в трубах.

Методы

Турбулентное течение можно представить себе как течение между жидкими, движущимися и вращающимися вихрями переменных размеров. Поступательно вихри двигаются с чуть меньшей скоростью, чем свободный поток, и обтекаются им. Это и создает сопротивление для потока. Таким образом, расчетная модель основана на рассмотрении внутреннего распределенного сопротивления как сопротивления, создаваемого турбулентной «вихревой засыпкой». Иными словами, турбулентное течение можно рассматривать как ламинарное с внутренним распределенным сопротивлением.

Термин «вихревая засыпка» связан с задачами о течениях через засыпки из твердых частиц. Такие задачи возникают в атомной энергетике, химической и других отраслях промышленности. В них течения рассматриваются как преодолевающие внутренние объемные сопротивления. Априорного теоретического способа определения таких сопротивлений в настоящее время не существует. Рассмотрим, как можно учесть такое сопротивление в круглой трубе.

Уравнение ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе при наличии распределенного сопротивления F имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\mu r \frac{dw}{dr}) = P - F \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} (xy')' = G(1 - \frac{F}{P}). \quad (1)$$

Здесь w – скорость, м/сек; w/w_a – относительная скорость; w_a – средняя скорость потока, м/сек; r – радиус, м; $x=r/R$ – относительный радиус; R – радиус канала, м; μ – динамическая вязкость, Па·сек; $P = \partial p / \partial z$ – градиент давления, Па/м; p – давление, Па; z – направление по оси потока, м; F – градиент давления от распределенного сопротивления, Па/м, $G = PR^2 / \mu w_a$.

Покажем, что существует функция $F/P = \gamma(x, y)$, при которой это уравнение определяет профиль осредненной скорости турбулентного стационарного потока. Рассмотрим величину P как полное сопротивление турбулентного потока и величину F – как сопротивление «вихревой засыпки». В общем виде они соответственно равны:

$$P = \frac{\xi}{2R} \rho \frac{w_a^2}{2} \quad \text{и} \quad F = \frac{\xi_s}{d_s} \rho \frac{w_a^2}{2}, \quad (2)$$

где ρ – плотность, кг/м³; d_s – характерный диаметр зерна «засыпки», м. Оценим отношение $\gamma = F/P$, входящее в уравнение (1). Коэффициент турбулентного сопротивления потока ξ в его зависимости от числа $Re = 2Rw_a\rho/\mu$ известен.

Коэффициент сопротивления засыпки ξ_s , рассматриваемый в технических приложениях, зависит от пористости засыпки и диаметра ее «зерна». Для определения параметров, влияющих на величину γ , была проведена серия вариантных расчетов, в которых менялись число Re и гипотетически возможные параметры «вихревой засыпки». Расчеты показали, что по порядку величин градиенты давления P и F близки друг другу. Было найдено, что значение величины γ хорошо описывается формулой $\gamma = (y/y_c)^2$, где y – искомая скорость, а $y_c = y(0)(1-x^2/2)^{0.5}$ – универсальный (не зависящий от Re) профиль, с большой точностью описывающий скорость турбулентного потока в его центральной части. В такой форме величина γ (доля общих потерь, приходящаяся на засыпку) меняется по радиусу и зависит только от формы профиля скорости, а не от ее амплитуды.

Уравнение (1) преобразуем следующим образом. Заменяем отношение F/P выражением $(y/y_c)^2$. Введем коэффициент $\theta = \theta(x)$ – характеристическую функцию, значение которой определяется зоной течения. Коэффициент θ полагаем равным единице

в турбулентном ядре и нулю в вязком подслое, около стенки. В переходной зоне величину θ , в первом приближении, можно принять равным 0,5. Положение точек перемены значений θ зависит, таким образом, только от числа Re.

В результате получим уравнение движения:

$$\frac{1}{x}(xy')' = G(1 - \theta_i(x) \frac{y^2}{y^2(0)(1 - \frac{x^2}{2})}) \quad 0 \leq x \leq x_i, \quad i=1,2,3, \quad (3)$$

Эквивалентом уравнения неразрывности в нашем случае является баланс объемного расхода:

$$2\pi \int_0^R w(r) r dr = w_a \pi R^2 = Q \quad \text{или} \quad 2 \int_0^1 u x dx = 1. \quad (4)$$

Эти соотношения определяют полный расход Q через все сечение, и при известном расходе – среднюю скорость w_a .

При рассмотрении отдельных зон течения соотношение для расхода приобретет вид

$$2 \int_0^{x_i} u x dx = 2 \int_0^{x_i} \varphi x dx = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где Q_i – относительный расход, а $\varphi(x)$ – принятое эталонное распределение скоростей. В нашем случае это распределение по формуле Рейхардта, приведенной к виду $\varphi(x) = w / w_a$. Положение точек x_i , разделяющих подобласти, определяется трехслойной схемой Кармана. Может быть выбрана и двухслойная схема. Постановка задачи приобретает теперь окончательный вид и содержит уравнение движения (3), уравнение неразрывности (4) или (5) и граничные условия: на левой границе (при $x=0$) $y'_i(0) = 0$, на правой границе (при $x=x_k$) $y=y_k$.

Ввиду отсутствия точного аналитического решения верификация данного нелинейного уравнения производилась численно [8] и показала хорошее совпадение с экспериментальными данными. Кроме того, в работе [10] на основе вышеприведенного уравнения, с применением метода локальных флуктуаций [11], было проведено прямое компьютерное моделирование турбулентного потока. Была сформирована система флуктуаций вязкости, имитировавшая набор вихрей или вихревых трубок в круглой трубе. Расчет турбулентного (по числу Re) потока с такой системой, проведенный в *Comsol Multiphysics* по программе ламинарного течения, дал хорошее совпадение с экспериментальными данными. Это послужило дополнительным доводом в пользу концепции «вихревой засыпки». Однако полезность аналитического уравнения существенно возрастет, если на его основе будет получено аналитическое же, пусть и приближенное, решение, позволяющее сделать те или иные нетривиальные выводы.

Найдем приближенное аналитическое решение уравнения (3) для турбулентного ядра, которое, как известно, при больших числах Re занимает почти все поле течения. Граничную точку ядра (x_k, y_k) определяем в соответствии с трехслойной схемой Кармана. Кроме вышеназванных, введем еще одно условие, а именно – условие в особой точке. Как отмечено в работе [1], по результатам экспериментов, так и по обобщающим более ранние эксперименты выражениям [9] видно, что на графиках наборов кривых $y=f(x, Re)$, определяющих скорость существует точка (x_*, y_*), в которой все эти кривые (для всех Re) пересекаются, и при этом $y_*=1$. Эту особую точку, не зависящую от числа Re, естественно использовать в качестве ещё одного условия задачи:

$$y(x_*) = y_*. \quad (6)$$

Введение еще одного условия позволит определить дополнительный параметр решения.

Получим приближенное аналитическое решение, используя метод последовательных приближений. Как известно, успех этого метода зависит от хорошего выбора начального

(нулевого) приближения. Это исходное приближение зададим в виде введенного выше выражения для y_c , добавив в подкоренное выражение множитель $(1-c-x^n)$:

$$y = y(0)\sqrt{(1-x^2/2)(1-c-x^n)}. \quad (7)$$

Интегрирование уравнения (3) с первыми двумя граничными условиями (при $\theta=1$) приводит к решению (первому приближению):

$$y = y_k - G[m(x_k^2 - x^2) + (x_k^p - x^p) / p^2] \quad (8)$$

Здесь $m=c/4$, $p=n+2$. Условия (5) и (6) позволяют найти неизвестные параметры m и p , т.е. полностью определить параметры скорости (8).

Стоит отметить, что между начальным приближением (7) и первым приближением (8) есть принципиальная разница, и сравнивать их нельзя. Если начальное приближение может быть выбрано произвольно, то первое приближение есть уже результат решения уравнения с его условиями, и поэтому оно обладает, как будет показано далее, определенными прогностическими свойствами. Для наших целей дальнейших приближений не требуется.

Приведем дополнительные подробности вычислений. После подстановки решения (8) в (5) условие баланса расхода становится таким:

$$\frac{y_k}{x_k^2} - G \left[\frac{m}{2} + \frac{x_k^{p+2}}{p(p+2)} \right] - \frac{Q_k}{x_k^4} = 0.$$

Условие прохождения через особую точку (6) дает

$$y_* - y_k - G[m(x_*^2 - x_k^2) + (x_*^p - x_k^p) / p^2] = 0.$$

Решение системы этих двух уравнений определяет параметры m и p . Входящие в эти уравнения величины определяем следующим образом. Для используемой нами трехслойной схемы Кармана точка «конца» турбулентного ядра имеет координаты

$$x_k = 1 - \frac{60}{\text{Re}} \sqrt{\frac{\xi}{8}}, \quad y_k = 13,5 \sqrt{\frac{\xi}{8}}. \quad \text{Коэффициент сопротивления принят равным}$$

$\xi = (1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^2$ (известная формула Г.К. Филоненко). Особая точка по Рейхардту имеет координаты $x_* \approx 0,80$, $y_* = 1$. Кроме того, используем тождество $G = -\xi \text{Re} / 8$, следующее из определения коэффициента сопротивления ξ и учитывающее знак градиента давления P .

Результаты

Проведем сначала численный анализ полученного решения. На рис. 1 показаны профили скоростей турбулентного течения при значениях чисел $\text{Re} = 1 \cdot 10^4$; $1 \cdot 10^5$; $1 \cdot 10^6$. Сплошные (эталонные) линии соответствуют формуле Рейхардта, пунктирные – решению (8). При $\text{Re} = 1 \cdot 10^4$ и $\text{Re} = 1 \cdot 10^5$ эти линии практически совпадают; при $\text{Re} = 1 \cdot 10^6$ (и ещё больших значениях Re) они различаются примерно на 2% (кроме зоны вблизи стенки). Таким образом, полученное решение вполне удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными для ядра потока.

Для дальнейшего анализа решение (8) удобно представить в виде

$$y = y_k + a(x_k^2 - x^2) + b(x_k^p - x^p), \quad (9)$$

где $a = -Gm$, $b = -G/p^2$. Вычисленные нами для диапазона $4 \cdot 10^4 \leq \text{Re} \leq 4 \cdot 10^7$ и представленные на рис. 2 параметры a , b и p аппроксимируются выражениями: $a = 0,0175 \lg^2 \text{Re} - 0,2712 \lg \text{Re} + 1,285$, $b = 0,0841 \lg \text{Re} - 0,0865$, $p = 0,3727 e^{0,851 \lg \text{Re}}$ и могут быть использованы для вычисления выражения (9).

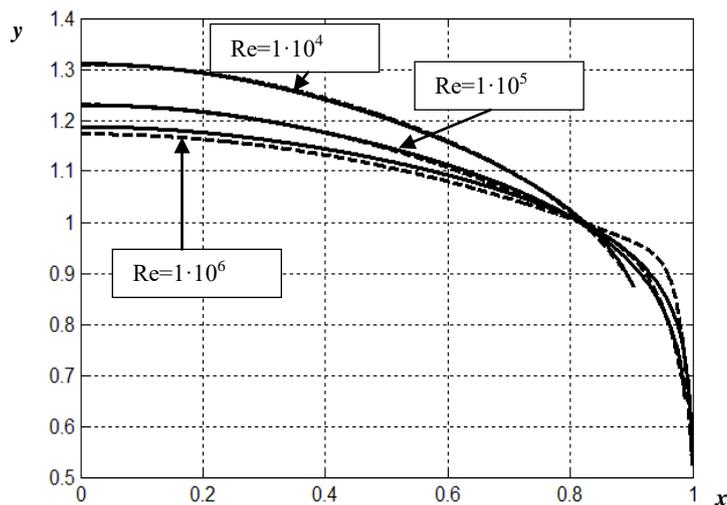


Рис. 1. Расчетные (пунктирные) и эталонные (сплошные профили скоростей турбулентного ядра потока в трубе при различных числах Re (x – относительный радиус; y – относительная скорость)

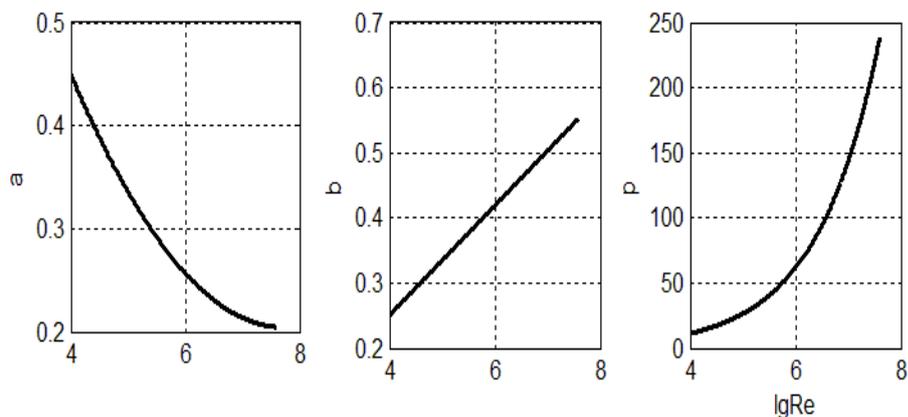


Рис. 2. Зависимость величин a , b , p (слева направо) от $\lg Re$

Рассмотрим теперь (рис. 3) качественные характеристики решения, а именно: из каких компонентов складывается модуль скорости и как они меняются в зависимости от числа Re . Эти компоненты таковы: y_k – «несущая» скорость турбулентного ядра; $y_1 = a(x_k^2 - x^2)$ – параболическая составляющая скорости, которая, как будет показано далее, создает профиль потока; $y_2 = b(x_k^p - x^p)$ – степенная непараболическая составляющая скорости, которая оказывает очень малое влияние на профиль потока всюду, за исключением пристеночной области. На рис. 3 представлены эти компоненты для двух чисел Re : для $Re = 1 \cdot 10^4$ (рис. 3,а) и $Re = 4 \cdot 10^7$ (рис. 3,б).

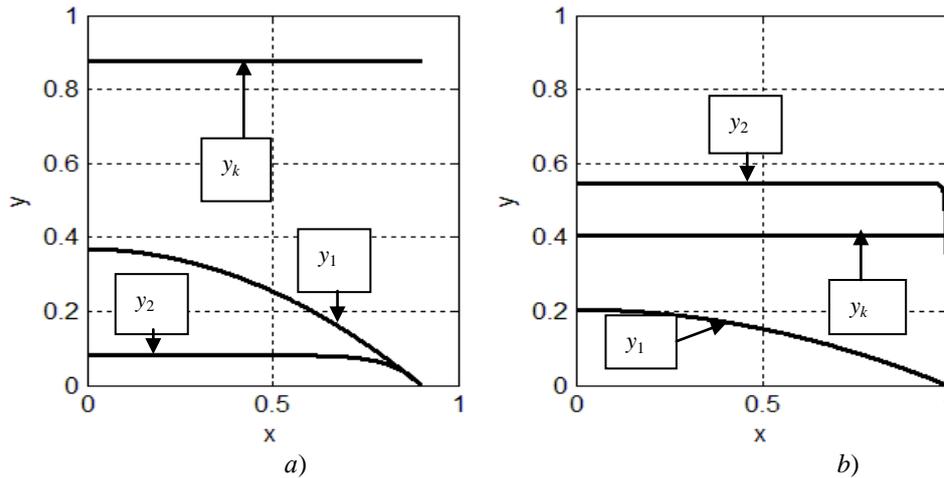


Рис. 3. Компоненты скоростей при $Re=1 \cdot 10^4$ (a) и $Re=4 \cdot 10^7$ (b): y_k – несущая скорость; y_1 – параболическая компонента скорости; y_2 – степенная (непараболическая) компонента скорости

Несмотря на различие чисел Re более чем на три порядка, характер компонент сохраняется неизменным. Величина y_k постоянна по радиусу и зависит только от числа Re ; величина y_1 – парабола с параметрами, зависящими от Re ; величина y_2 почти постоянна по радиусу (для каждого Re) и уменьшается только вблизи края зоны ядра или стенки. Как следует из рис. 2, коэффициент a в рассматриваемом диапазоне чисел Re уменьшается от 0,45 до 0,2, коэффициент b увеличивается от 0,25 до 0,55. Более всего меняется показатель степени p – от 11 до 240. При таких больших показателях p значение x^p близко к нулю почти всюду, что и приводит к почти полному постоянству y_2 по радиусу.

Рост параметра b и координаты x_k приводит к тому, что компонента y_2 возрастает почти в шесть раз. Но самое интересное происходит с составляющей y_1 . Она уменьшается, но менее чем в два раза, и ее вклад остается существенным при самых больших числах Рейнольдса. Именно она, и только она формирует профиль скорости в его большей части при любом значении числа Re , делая его параболическим. Таким образом, полученная формула для решения и ее анализ позволяют оценить соотношение компонент, формирующих профиль турбулентной скорости.

Стоит отметить, что выражение (8) с условиями (5) и (6) включает в себя в качестве частного случая точное решение для ламинарного течения. Действительно, тогда $x_k=1$, $y_k=0$ (условия на стенке), $Q_k=1$ (полный расход), $y_*=1$, $x_*=1/\sqrt{2}$ (особая точка в данном случае). Подставив эти величины в условия (5) и (6), получим систему, решением которой

является набор $m=0$, $p=2$. Подставив эти значения в (8), получим $y = -\frac{G}{4}(1-x^2)$.

Поскольку для ламинарного потока $\xi = \frac{64}{Re}$, получим окончательно $y = 2(1-x^2)$, т.е.

профиль ламинарного потока. Именно поэтому формулу (4) можно назвать обобщающей для турбулентного и ламинарного режимов течения.

Чтобы сделать приведенные результаты максимально наглядными, сделаем в уравнении (8) и условии (5) замену переменной $t = \frac{x^2}{2}$, что приведет их к предельно простому виду:

$$(ty)′ = \frac{G}{2} \left(1 - \theta \frac{y^2}{y(0)(1-t)} \right), \quad 0 \leq t \leq t_k = \frac{x_k^2}{2} \quad (10)$$

$$2 \int_0^{t_k} y(t) dt = Q_k \quad (11)$$

Опуская промежуточные выкладки, выпишем решение задачи в этой форме

$$y = y_k + 2a(t_k - t) + 2^{p/2} b(t_k^{p/2} - t^{p/2}). \quad (12)$$

На рис. 4 в новых координатах (t,y) по формуле (12) показаны те же профили скоростей, что и на рис. 1, т.е. скорости для $Re=1 \cdot 10^4$, $1 \cdot 10^5$, $1 \cdot 10^6$. Тут же приведен профиль ламинарной скорости $y=4(0,5-t)$ (решение задачи (10),(11) при $\theta=0$, представляющее собой прямую линию по диагонали рисунка).

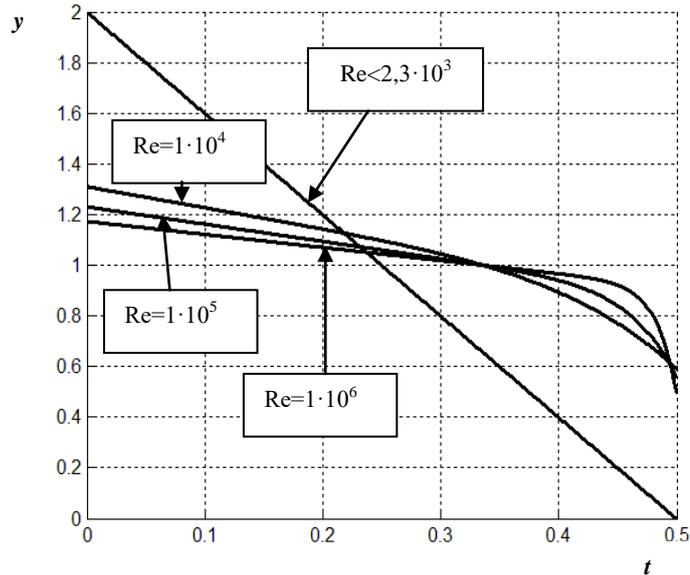


Рис. 4. Профили турбулентных скоростей, соответствующих рис.1 и вычисленных по формуле (12), и профиль ламинарной скорости, в относительных координатах (t,y)

Невооруженным глазом видна близкородственная связь (практически – одинаковость) профилей ламинарной скорости и скорости на большей части турбулентного ядра (все они – прямые линии в данных координатах). Производная функции (12), имеющая вид $y′ = -r + st^{p/2-1}$, из-за больших значений p начинает отклоняться от константы только вблизи конца турбулентного ядра. Кроме того, в этом представлении четко видна «особость» особой точки, лежащей на середине диапазона абсцисс, на середине диапазона ординат и на середине длины прямой – профиля ламинарной скорости.

Обсуждение

Необходимо отметить, что в экспериментах Загаролы и др. [1; 2] особая точка ($y=y_*=1$) соответствует абсциссе $x_*=0,75$, а не 0,80, как по Рейхардту. Это расхождение (в 5–6%) отражается и на ординатах кривых – в пределах 2–3%. Кроме того, в этих экспериментах были обнаружены загибы кривых (расщепление по числу Re), которые раньше не наблюдались. Такие различия между тщательно проведенными экспериментами свидетельствуют, возможно, о принципиально неполной воспроизводимости данных процессов. Подобное свойство обнаружено

М.А. Гольдштиком у течений в зернистом слое [12]. Поскольку турбулентное течение можно трактовать как течение через подвижную «вихревую засыпку» переменной структуры [8; 10], а также, учитывая относительную медленность и крупномасштабность вихреобразования, есть основания полагать, что существует определенная физическая схожесть данных процессов. Эта схожесть приводит к существованию «разрешенной процессом точности» [12], превышать которую в описаниях этих процессов не имеет смысла. Стоит отметить также, что полный (по всему сечению) относительный расход для эталонного распределения Рейхардта, считающегося очень точным, равен примерно 1,02–1,03 (для разных Re), т.е. отличается на 2–3% от абсолютно верной теоретической единицы. Таким образом, создается впечатление, что разрешенная процессом точность составляет приблизительно $\pm 2-3\%$. Сравнение турбулентного потока с течением в зернистом слое, начатое в работах [8; 10], рассматривается в этом аспекте, насколько известно авторам, впервые, поэтому его обсуждение в научной литературе было бы чрезвычайно полезным.

Заключение

В работе на основе модифицированного дифференциального уравнения движения получено приближенное аналитическое решение задачи о профиле скорости турбулентного течения в трубах. Это решение пригодно как для турбулентного, так и для ламинарного режимов. Показано, что, несмотря на принципиальное физическое различие ламинарных и турбулентных течений, их математическое описание (в том, что касается профиля средних скоростей) имеет черты существенного сходства. Это сходство имеет, в свою очередь, определенную физическую основу, связанную с наличием молекулярной вязкости. С помощью нового преобразования координат это сходство наглядно продемонстрировано - показан переход ламинарного профиля в турбулентный с сохранением характера его профиля в основной части потока. Впервые именно на основе аналитического решения уравнения движения показано, что профиль турбулентного течения в трубах является степенным, а на большей его части – конкретно параболическим. То, что это сделано на основе уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности, особенно важно, поскольку в этом направлении «почти ничего не было получено» [4] многие годы. Показано, что «родной» формой описания профиля скорости является степенная. Отклонение от параболичности в рассматриваемой (основной) части поперечного сечения крайне мало и вполне укладывается в рамки рассмотренной выше разрешенной процессом точности. Из параболичности профиля следует, что влияние молекулярной вязкости в турбулентном ядре потока сохраняется (при любых числах Re), т.е. что гипотеза фон Кармана, гласящая, что «вне близкой окрестности стенки распределение скорости не зависит от вязкости» [4], неверна. Это согласуется с выводами работы [4].

Суммируя все вышеизложенное, следует отметить, что данная работа доказывает параболичность профиля скорости центральной части турбулентного потока в трубах на основе уравнения Навье-Стокса и поднимает вопрос о неполной воспроизводимости и разрешенной точности рассмотрения турбулентного течения в трубах. Кроме того, впервые вводится в рассмотрение преобразование координат, предельно упрощающее уравнение Навье-Стокса и его решение для круглых цилиндрических течений. Полученные результаты позволяют просто и точно рассчитывать профиль скорости турбулентного потока в трубах в его центральной части и, в особенности, величину его осевой скорости.

Литература

1. Zagarola M.V., Smits A.J. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow // J. Fluid Mech. 1998. V. 373, pp. 33–79.

2. McKeon B.J., Li J., Jiang W, Morrison J.F., Smits A.J. Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 501, pp. 135–147.
3. George W.K. Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows? // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2007. V. 365, pp. 789–806.
4. Баренблатт Г.И., Корин А.Дж., Простокишин В.М. Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса: уроки новых исследований // *Успехи физических наук.* 2014. Т. 184, № 3. С. 265–272. <https://ufn.ru/ru/articles/2014/3/e/>.
5. Вигдорович И.И. Описывает ли степенная формула турбулентный профиль скорости в трубе? // *Успехи физических наук.* 2015. Том 185, № 2. С. 213–216. <https://ufn.ru/ru/articles/2015/2/>.
6. Баренблатт Г.И., Корин А.Дж., Простокишин В.М. К проблеме турбулентных течений в трубах при очень больших числах Рейнольдса // *Успехи физических наук.* 2015. Т. 185, № 2. С. 217–220. <https://ufn.ru/ru/articles/2015/2/>.
7. Заволженский М.В., Руткевич П.Б. Развитая турбулентность в трубах. М.: ИКИ РАН, 2007. № 2140. 38 с.
8. Меламед Л.Э. Уравнение турбулентного движения в трубах // *Письма в Журнал технической физики.* 2015. Т. 41, Вып. 24. С. 23–28. <http://journals.ioffe.ru/articles/viewpdf/42592>.
9. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen // *Z. Angew. Math. Mech.* 1951. Db. 31. No. 7. Pp. 208–219.
10. Меламед Л.Э., Филиппов Г.А. Моделирование турбулентности как «вихревой засыпки» // *Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики.* 2017. Т. 19. № 9–10. С. 122–132.
11. Меламед Л.Э. Метод локальных флуктуаций и моделирование неоднородных сред // *Письма в Журнал технической физики.* 2016. Т. 42, Вып. 19. С. 31–37. <http://journals.ioffe.ru/articles/viewpdf/43761>
12. Гольдштик М.А. Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск, 2005. 358 с.

Авторы публикации

Меламед Лев Эммануилович – канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник закрытого акционерного общества «Интеллект», г. Москва. E-mail: lev.melamed@yandex.ru.

Филиппов Геннадий Алексеевич – д-р техн. наук, академик РАН по Отделению энергетики, машиностроения, механики и процессов управления (ОММПУ) РАН, г. Москва.

References

1. Zagarola M.V., Smits A.J. Mean-flow scaling of turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 373, pp. 33–79.
2. McKeon B.J., Li J., Jiang W, Morrison J.F., Smits A.J. Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 501, pp. 135–147.
3. George W.K. Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows? // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2007. V. 365, pp. 789–806.
4. Barenblatt G.I., Korin A.Dzh., Prostokishin V.M. Turbulentnyye techeniya pri ochen' bol'shikh chislakh Reynol'dsa: uroki novykh issledovaniy. // *Uspekhi fizicheskikh nauk.* 2014. Т. 184. № 3. Pp. 265–272. <https://ufn.ru/ru/articles/2014/3/e/>
5. Vigdorovich I.I. Opisyyayet li stepennaya formula turbulentnyy profil' skorosti v trube? // *Uspekhi fizicheskikh nauk.* 2015. Том 185. № 2. Pp. 213–216. <https://ufn.ru/ru/articles/2015/2/>
6. Barenblatt G.I., Korin A.Dzh., Prostokishin V.M. K probleme turbulentnykh techeniy v trubakh pri ochen' bol'shikh chislakh Reynol'dsa // *Uspekhi fizicheskikh nauk.* 2015. Т. 185. № 2. Pp. 217–220. <https://ufn.ru/ru/articles/2015/2/>
7. Zavolzhenskiy M.V., Rutkevich P.B. Razvitaya turbulentnost' v trubakh. M.: IKI RAN. 2007. № 2140. 38 p.

8. Melamed L.E. Uravneniye turbulentnogo dvizheniya v trubakh // Pis'ma v ZHurnal tekhnicheskoy fiziki. 2015. T. 41. Vyp. 24. Pp. 23–28. <http://journals.ioffe.ru/articles/viewpdf/42592>

9. Reichardt H. Vollstadige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen // Z. Angew. Math. Mech. 1951. Db. 31. No. 7. Pp. 208–219.

10. Melamed L.E., Filippov G.A. Modelirovaniye turbulentnosti kak «vikhrevoiy zasypki» // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Problemy energetiki. 2017. T. 19. № 9–10. Pp. 122–132.

11. Melamed L.E. Metod lokal'nykh fluktuatsiy i modelirovaniye neodnorodnykh sred // Pis'ma v ZHurnal tekhnicheskoy fiziki. 2016. T. 42. Vyp. 19. C. 31–37. <http://journals.ioffe.ru/articles/viewpdf/43761>

12. Gol'dshtik M.A. Protsessy perenosa v zernistom sloye. Novosibirsk. 2005. 358 p.

Authors of the publication

Lev Emmanuilovich Melamed – Dr. Sci. (Techn.), chief scientist of closed joint-stock company “Intelligence”, Moscow. E-mail: lev.melamed@yandex.ru.

Gennady Alekseevich Filippov – Dr. Sci. (Techn.), professor, member of Russian Academy of Sciences, Department of power, mechanical engineering, mechanics and control processes, Moscow.

Поступила в редакцию

11 июля 2018 г.