УДК 536.24

ПРОЦЕСС ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ДВУХСЛОЙНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

Ю.В. Видин[1], Р.В. Казаков[2], В.С. Злобин[1]

[1]Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия
[2]МОД «Народный контроль в ЖКХ», г. Красноярск, Россия

Резюме: *Определение тепловых режимов составных цилиндрических тел аналитическими методами приводит к появлению сложных характеристических уравнений, решением которых является определение собственных чисел. В статье рассмотрен сравнительно простой приближенный аналитический метод определения собственных чисел характеристических уравнений для двухслойного цилиндрического тела при граничных условиях третьего рода. Данный метод также может быть легко использован в более сложных постановках задач теплопроводности.*

Ключевые слова: *характеристическое уравнение, собственные числа, нестационарное температурное поле, неоднородное цилиндрическое тело.*

DOI:*10.30724/1998-9903-2018-20-11-12-93-98.*

Для цитирования: *Видин Ю.В., Казаков Р.В., Злобин В.С. Процесс переноса тепла в двухслойном цилиндрическом теле // Известия высших учебных заведений. ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ. 2018. Т. 20. № 11-12. С. 93-98. DOI:10.30724/1998-9903-2018-20-11-12-93-98.*

THE PROCESS OF HEAT TRANSFER IN TWO-LAYERED CYLINDRICAL BODY

U.V. Vidin[1], R.V. Kazakov[2], V.S. Zlobin[1]

[1]Polytechnic Institute of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia
[2]People's control in housing and communal services, Krasnoyarsk, Russia

Abstract: *Determination of thermal regimes of composite cylindrical bodies by analytical methods leads to the appearance of complex characteristic equations, the solution of which is the determination of eigenvalues. The article considers a relatively simple approximate analytical method for determining the eigenvalues of characteristic equations for a two-layer cylindrical body under boundary conditions of the third kind. This method can also be easily used in more complex formulations of heat conduction problems.*

Keywords: *characteristic equation, eigenvalues, non-stationary temperature field, non-uniform cylindrical body.*

For citation: *U.V. Vidin, R.V. Kazakov, V.S. Zlobin. The process of heat transfer in two-layered cylindrical body. Proceedings of the higher educational institutions. ENERGY SECTOR PROBLEMS 2018. vol. 20. № 11-12. pp. 93-98. DOI:10.30724/1998-9903-2018-20-11-12-93-98.*

В монографии [1] представлено аналитическое решение определения нестационарного температурного поля в сплошном цилиндрическом теле, окруженном сравнительно тонкой оболочкой. Автор данной работы, принимая в первом приближении тонкую оболочку близкой к плоской, получил следующие безразмерные математические выражения для этой двухслойной системы:

$$\vartheta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \psi) \exp\left(-\mu_n^2 Fo\right); \tag{1}$$

$$\vartheta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Big\{ J_0(\mu_n) \cos\left[\mu_n \sqrt{K_a}(\psi - 1)\right] - $$
$$- K_\varepsilon J_1(\mu_n) \sin\left[\mu_n \sqrt{K_a}(\psi - 1)\right]\Big\} \exp\left(-\mu_n^2 Fo\right), \tag{2}$$

где использованы обозначения:

$$\vartheta_1 = \frac{T_c - T_1(r,\tau)}{T_c - T_0}; \quad \vartheta_2 = \frac{T_c - T_2(r,\tau)}{T_c - T_0}; \quad \psi = \frac{r}{R_1}; \quad Fo = \frac{a_1 \tau}{R_1^2}; \quad K_a = \frac{a_1}{a_2}; \quad K_\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda_1 c_1 \rho_1}{\lambda_2 c_2 \rho_2}}.$$

Причем индекс «1» справедлив для центрального цилиндрического стержня, а «2» – для наружного слоя.

В литературе [1] приведена также развернутая зависимость для расчета коэффициентов рядов A_n.

Основной проблемой при практическом использовании формул (1) и (2) является нахождение собственных чисел данной задачи μ_n, которые при указанном выше допущении должны удовлетворять сравнительно сложному характеристическому уравнению вида [1]

$$J_0(\mu)\Big\{Bi \cos\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right] - \sqrt{K_a}\psi_0 \mu \sin\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right]\Big\} -$$
$$- K_\varepsilon J_1(\mu)\Big\{Bi \sin\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right] + \sqrt{K_a}\psi_0 \mu \cos\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right]\Big\} = 0, \tag{3}$$

где безразмерное число Био рассчитывается по соотношению $Bi = \dfrac{\alpha R_1}{\lambda_1}$, а геометрический параметр $\psi_0 = \dfrac{R_2}{R_1}$.

Очевидно, что, если $\psi_0 = 1$ (оболочка отсутствует), выражение (3) вырождается в хорошо известное соотношение [1, 2]:

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}, \tag{4}$$

справедливое для сплошного однородного бесконечного цилиндрического тела.

Первые шесть корней этого уравнения в зависимости от числа Bi приведены в [1, 2]. Кроме этого, в работах [3–5] предложены весьма эффективные аналитические методы для определения собственных чисел μ_n уравнения типа (4) для любых величин Bi ($0 \le Bi < \infty$) и при любом порядковом номере n. Значительно сложнее определить корни μ_n по уравнению (3), которое содержит намного больше исходных параметров, что, как известно, свойственно задачам теплопроводности многослойных конструкций [6–8]. Поэтому разработка оперативных инженерных способов решения уравнений класса (3) представляет как математический, так и прикладной интерес.

На первом этапе, по-видимому, целесообразно установить для заданных исходных значений K_a, K_ε и ψ_0 возможные предельные величины μ_n. Для этого, очевидно, необходимо исследовать данную зависимость для случаев, когда $Bi = 0$ и $Bi \to \infty$.

Тогда формула (3) принимает соответствующие более простые выражения:

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = -K_\varepsilon \mathrm{ctg}\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right], \tag{5}$$

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = K_\varepsilon \mathrm{tg}\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right]. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что зависимости (5) и (6) в случае, когда параметр $\psi_0 = 1$ (т.е. внешнего слоя нет), вырождаются в уравнение (4) для указанных предельных величин Bi. Следовательно, известные корни μ_n этого уравнения для $Bi = 0$ и $Bi \to \infty$ могут рассматриваться как некоторые граничные значения. В табл. 1, в частности, приведены первые три корня μ_n соотношения (4) [1, 2].

Указанные в табл. 1 диапазоны могут быть откорректированы. Так, в частности, если использовать аппроксимацию

$$\mathrm{tg}\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu\right] = \sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu, \tag{7}$$

Таблица 1

Значения первых корней уравнения (4) для $Bi = 0$ и $Bi \to \infty$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	3,8317	7,0156
∞	2,4048	5,5201	8,6537

которая является наиболее простым и близким приближением на интервале $0 \le \sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu \le 0{,}5$, то тогда выражение (6) примет вид

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi^*}, \tag{8}$$

где фиктивное число Bi^*

$$Bi^* = \frac{1}{K_\varepsilon \sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)}. \tag{9}$$

Формула типа (8), как отмечалось ранее, подробно исследована в работах [1–5] и поэтому нахождение ее корней μ_n не представляет затруднений.

Рассмотрим следующий конкретный пример.

Предположим, что параметры $\sqrt{K_a}$, K_ε и ψ_0 соответственно равны $\sqrt{K_a} = 0{,}5$, $K_\varepsilon = 0{,}5$ и $\psi_0 = 1{,}2$, что свойственно сравнительно значительному по толщине слою налагаемого материала, обладающему более высокой теплопроводностью по сравнению с центральным телом. Тогда условное число Bi^* будет равно

$$Bi^* = \frac{1}{K_\varepsilon \sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)} = \frac{1}{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (1{,}2 - 1)} = 20.$$

При такой величине Bi^* первый корень μ_1 уравнения (8), согласно [1], равен $\mu_1 = 2{,}2880$ и, следовательно, предложенная аппроксимация (7) в данном случае вполне допустима, так как комплекс $\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu_1 = 0{,}5(1{,}2 - 1)2{,}2880 = 0{,}2288 < 0{,}3$.

Если же необходимо вычислить μ_1 с более высокой точностью, то можно найти второе приближение на основе соотношения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = K_\varepsilon \mathrm{tg}\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu_1\right] = 0{,}5\,\mathrm{tg}\left[0{,}5(1{,}2 - 1)2{,}2880\right] = 0{,}11644.$$

Отсюда следует, что $\mu_1 = 2{,}286$, т.е. наблюдается незначительное уточнение.

Принципиально подобный подход применим и для поиска значений μ_n и более высоких порядков. Так первое приближение для второго корня μ_2 при $Bi^* = 20$ на основе [1] равняется $\mu_2 = 5{,}2568$. Второе приближение находится из условия

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = K_\varepsilon \mathrm{tg}\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu_2\right] = 0{,}5\,\mathrm{tg}\left[0{,}5(1{,}2-1)5{,}2568\right] = 0{,}2901 \,,$$

что соответствует $\mu_2 = 5{,}23$. Эта величина позволяет найти третье приближение по той же схеме, которое будет мало отличаться от уже полученного.

Третий корень μ_3 рассчитывается аналогичным образом. Из [1] находим первое приближение для $\mu_3 = 8{,}2534$. Следовательно, второе приближение можно выявить из условия

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = K_\varepsilon \mathrm{tg}\left[\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu_2\right] = 0{,}5\,\mathrm{tg}\left[0{,}5(1{,}2-1)8{,}2534\right] = 0{,}5416 \cdot$$

Отсюда имеем $\mu_3 = 8{,}143$. Далее более точное приближение будет $\mu_3 = 8{,}152$. Последующие итерации проводить нецелесообразно, так как этот процесс очень быстро сходится.

Результаты выполненных конкретных расчетов показывают, что предлагаемый несложный метод нахождения предельных величин первых собственных чисел μ_n обладает приемлемой точностью, если безразмерный комплекс $\sqrt{K_a}(\psi_0 - 1)\mu$ даже превышает ограничение 0,5.

Аналогичным образом осуществляется оценка минимальных значений μ_n для $Bi = 0$. Для этого можно использовать условие (5), из которого, например, следует, что $\mu_1 = 0$. Применяя выражение (5), удается найти μ_2, μ_3 и т.д. Если взять за базовое значение $\mu_2 = 3{,}8317$ (табл.1), то методом последовательного приближения с помощью уравнения (5) можно вычислить фактический корень μ_2, который для ранее принятых параметров $\sqrt{K_a}$, K_ε и ψ_0 будет равен $\mu_2 = 3{,}276$. Точно также, принимая за исходную величину $\mu_3 = 7{,}0156$, находится истинное значение $\mu_3 = 6{,}114$. В табл. 2 приведены рассчитанные предложенным методом μ_1, μ_2 и μ_3 для случая $\sqrt{K_a} = 0{,}5$, $K_\varepsilon = 0{,}5$ и $\psi_0 = 1{,}2$, когда $Bi = 0$ и $Bi \to \infty$.

Таблица 2

Значения первых трех корней уравнений (5) и (6) при $\sqrt{K_a} = 0{,}5$, $K_\varepsilon = 0{,}5$ и $\psi_0 = 1{,}2$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	3,276	6,114
∞	2,286	5,230	8,152

Для упрощения процедуры вычисления предельных величин μ_n с помощью уравнений (5) и (6) полезно использовать табл. 3, в которой приведены значения функции $y = \dfrac{J_0(x)}{J_1(x)}$ в интервале аргумента $0 \le x \le 10$, рассчитанные на основе данных, имеющихся в работе [8].

Зависимость (3) достаточно просто может быть преобразована к виду

$$Bi = \frac{\sqrt{K_a}\,\psi_0\,\mu\left\{\dfrac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)}\sin\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\mu\right]+K_\varepsilon\cos\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\mu\right]\right\}}{\dfrac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)}\cos\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\mu\right]+K_\varepsilon\sin\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\mu\right]}, \qquad (10)$$

на основе которой при заданном корне μ вычисляется соответствующее ему число Bi.

Таблица 3

Значения отношений функций Бесселя $\dfrac{J_0(x)}{J_1(x)}$

x	$\frac{J_0(x)}{J_1(x)}$	x	$\frac{J_0(x)}{J_1(x)}$	x	$\frac{J_0(x)}{J_1(x)}$
0		0,50	3,847	1,50	0,917
0,05	39,991	0,60	3,181	1,60	0,799
0,10	19,947	0,70	2,678	1,70	0,689
0,15	13,296	0,80	2,294	1,80	0,585
0,20	9,950	0,90	1,989	1,90	0,485
0,25	7,937	1,00	1,739	2,00	0,388
0,30	6,591	1,10	1,528	2,10	0,293
0,35	5,626	1,20	1,347	2,20	0,199
0,40	4,899	1,30	1,188	2,30	0,103
0,45	4,331	1,40	1,046	2,40	0,005

Так, например, если принять $\mu_1 = 1$, то по соотношению (10) находим

$$Bi = \frac{\sqrt{K_a}\,\psi_0\left\{\dfrac{J_0(1)}{J_1(1)}\sin\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\right]+K_\varepsilon\cos\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\right]\right\}}{\dfrac{J_0(1)}{J_1(1)}\cos\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\right]+K_\varepsilon\sin\left[\sqrt{K_a}(\psi_0-1)\right]} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 1{,}2\cdot\{1{,}74\sin\left[0{,}5\cdot(1{,}2-1)\right]+0{,}5\cos\left[0{,}5\cdot(1{,}2-1)\right]\}}{1{,}74\cos\left[0{,}5\cdot(1{,}2-1)\right]-0{,}5\sin\left[0{,}5\cdot(1{,}2-1)\right]} = 0{,}24\,.$$

Аналогичным способом вычисляется Bi, если взять $\mu_1 = 2$. Тогда, согласно (10), оно будет равно $Bi = 2{,}42$.

Следовательно, для рассматриваемого варианта $\sqrt{K_a} = 0{,}5$, $K_\varepsilon = 0{,}5$ и $\psi_0 = 1{,}2$ является справедливым такой результат:

1) при $0 \le Bi \le 0{,}24$ $\quad 0 \le \mu_1 \le 1$; 2) при $0{,}24 \le Bi \le 2{,}42$ $\quad 1 \le \mu_1 \le 2$;

3) при $2{,}42 \le Bi < \infty$ $\quad 2 \le \mu_1 \le 2{,}286$.

Таким образом, сравнительно просто аналитическим путем устанавливаются узкие зоны для нахождения искомых корней μ_n.

Рекомендованный подход также может быть эффективно использован и в случае анализа задач теплопереноса при некоторых иных видах граничных условий [9, 10].

Литература

1.Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Издательство «Наука», 1964. 487 с.

3. Видин Ю.В., Казаков Р.В. Определение собственных значений высокого порядка в задаче теплопроводности цилиндрического тела // Известия Российской академии наук: Энергетика. 2017. №4. С. 143–150.

4. Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов Д.И. Нестационарный теплоперенос в неоднородных конструкциях криволинейной конфигурации. Красноярск : СФУ, 2016. 167 с.

5. Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В. Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск : СФУ, 2014. 157 с.

6. Tittle C.W., Robinson L.V. The analytical solution of conduction problems in composite media. The American society of mechanical engineers. 1965. P.1–4.

7. Fritz Kramer. Berechnung endimensionaler, nich-stationarer Warmestromungen durch mehrsichtige Wande mittels Differenzenverfaren. Forsch. Ingenieurwes, 1966. 32, № 6. P. 165–174.
8. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Государственное издание физико-математической литературы, 1962. 450 с.
9. Стефанюк Е.В., Еремин А.В., Кузнецова А.Э., Абишева Л.С. Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи // Шестая российская национальная конференция по теплообмену 27–31 октября 2014 г. М.: Издательский дом МЭИ, 2014. С. 225–226.
10. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П. Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Том 55, №4. С. 669–680.

Авторы публикации

Видин Юрий Владимирович – канд. техн. наук, профессор кафедры «Тепловые электрические станции» Политехнического института Сибирского федерального университета (ПИ СФУ). E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

Казаков Роман Владимирович – канд. техн. наук, председатель МОД «Народный контроль в ЖКХ». E-mail: roman.kazakov@list.ru.

Злобин Виктор Семенович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Тепловые электрические станции» Политехнического института Сибирского федерального университета (ПИ СФУ). E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

References

1. Lykov, A.V. the Theory of thermal conductivity. M.: Higher school, 1967. 600 p.
2. Carslaw,, Eger D. thermal Conductivity of solids. M.: Publishing house "Nauka", 1964. 487 p.
3. Vidin Y.V., Kazakov R.V. determination of eigenvalues of high order in the problem of thermal conductivity of a cylindrical body // «Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering» Journal. 2017. № 4. P. 143–150.
4. Vidin Y.V., Zlobin V.S., Ivanov D.I. Unsteady heat transfer in inhomogeneous structures of curvilinear configuration. Krasnoyarsk : SFU, 2016. 167 p.
5. Vidin V.V., Ivanov V.V., Kazakov R.V. Engineering methods of calculation of heat transfer problems. Krasnoyarsk : SFU, 2014. 157 p.
6. Tittle C.W., Robinson L.V. The analytical solution of conduction problems in composite media. The American society of mechanical engineers. 1965. P. 1–4.
7. Fritz Kramer. Berechnung endimensionaler, nich-stationarer Warmestromungen durch mehrsichtige Wande mittels Differenzenverfaren. Forsch. Ingenieurwes. 1966. 32, № 6. P. 165–174.
8. Segal B.I., Semendyaev K.A. Five-figure mathematical tables. M.: The state publishing of physical and mathematical literature, 1962. 450 p.
9. Stefanyuk, E.V., Eremin, A.V., Kuznetsova, A.E., Abisheva, L.S. Analytical solutions of heat conductivity problems with variable heat transfer coefficients in time // The sixth Russian national conference on heat transfer from 27 to 31 October 2014. M.: MPEI Publishing house, 2014. P. 225–226.
10. Kudinov V., Kudinov I. V., Skvortsova M. P. Generalized functions and additional boundary conditions in heat conduction problems for multilayer bodies // Journal of computational mathematics and mathematical physics, 2015. Volume 55, №4. P. 669–680.

Authors of the publication

Yury V. Vidin **–** PhD in Engineering sciences, Professor of the Department "Thermal power stations" of the Polytechnic Institute of the Siberian Federal University (PI SFU). E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

Roman V. Kazakov **–** PhD in Engineering sciences, Director of the MOD " People's control in housing and communal services». E-mail: roman.kazakov@list.ru.

Viktor S. Zlobin – PhD in Engineering sciences, Associate Professor of the Department "Thermal power stations" of the Polytechnic Institute of the Siberian Federal University (PI SFU). E-mail: zlobinsfu@mail.ru.

Поступила в редакцию ***15 октября 2018 г.***