

ФИЗИКА



УДК 593.3

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Э.М. Карташов¹, И.А. Соловьев²

¹Московский технологический университет (МИТХТ), г. Москва, Россия

e-mail: kartashov@mitht.ru

²Государственный университет по землеустройству, г. Москва, Россия

e-mail: igorsoloviev@inbox.ru

Резюме: Предложено стохастическое описание задачи Стефана на основе детерминированной модели в гиперболическом описании. Это описание основано на обобщенном уравнении Фоккера-Планка Колмогорова. Основное положение таково: детерминированные уравнения и их решения – есть средние значения стохастической модели задачи Стефана. Рассмотрена проблема деформирования фронта фазового перехода. Исследование производится с помощью введенного положения устойчивости по дисперсии решений для средних значений. Результатом исследования является тот вывод, что влияние марковского коэффициента диффузии приводит к значительному искажению первоначально плоского фронта границы раздела фаз.

Ключевые слова: Задача Стефана, гиперболическое уравнение теплопроводности, обобщенное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, устойчивость решений дифференциальных уравнений, деформация фронта фазового перехода.

THE STOCHASTIC FORMULATION OF THE STEPHAN'S PROBLEM IN HYPERBOLIC REPRESENTATION

E.M. Kartashov¹, I.A. Soloviev²

¹State Technological University (MITHT), Moscow, Russia

e-mail: kartashov@mitht.ru

²State University of Land Management, Moscow, Russia

e-mail: igorsoloviev@inbox.ru

Abstract: The presented work offers the stochastic description of the Stephan's problem in hyperbolic representation equation. This description is based on the generalized Fokker-Plank-Kolmogorov equation. The basic thesis of this work is that the determined equalizations and their decisions are the average values of stochastic Stephan's task model. This work considers the problem of phase transition front deformation. The research is performed using the entered position of stability on dispersion of decisions for average values. The conclusion of the study is that Markov's diffusion coefficient leads to a significant distortion of the originally flat front of the phase boundary.

Keywords: *Stefan problem, hyperbolic equation of heat conduction, generalized equation of the Fokker-Planck-Kolmogorov, stability of solutions of differential equations, deformation of the phase transition front.*

For citation: Kartashov E.M., Soloviev I.A. The stochastic formulation of the Stefan's problem in hyperbolic representation. *Proceedings of the higher educational institutions. ENERGY SECTOR PROBLEMS*. 2019; 21(3-4):116-126. (In Russ). doi:10.30724/1998-9903-2019-21-3-4-116-126.

Введение

Перечислим проблемы, относящиеся к детерминированному описанию теплопроводности при фазовых превращениях. Первая проблема, касающаяся детерминированных моделей Фурье и классической задачи Стефана [1], заключается в бесконечности скорости распространения начальных возмущений температуры, а также бесконечности начальной скорости перемещения границы раздела фаз. Вторая проблема состоит в том, что в детерминированной модели не описывалась деформация с течением времени первоначально плоской формы фазового перехода.

Исследование эффектов при быстропротекающих проявлениях теплопроводности восходит к работам Максвелла–Каттанео–Лыкова, описанных в работах [2, 3]. В этих работах описывается обобщенный закон Фурье:

$$\partial \bar{q}(x, y, z, t) / \partial x = -\lambda \text{grad} T(x, y, z, t) - \tau_r \partial q(x, y, z, t) / \partial t, \quad (1)$$

учитывающий конечную скорость распространения теплоты. Здесь (x, y, z) – пространственные координаты; t – временная координата; \bar{q} – плотность теплового потока; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; a – коэффициент температуропроводности; τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения теплоты v_T соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$. Соотношение (1) имеет простой физический смысл: при возникновении градиента температуры необходимо некоторое время для установления теплового потока, когда $\text{grad} T = 0$, тепловой поток не пропадает мгновенно, а затухает со временем релаксации τ_r . Проанализировав обобщенную задачу теплопроводности для полупространства, граничное значение температуры которого изменяется в начальный момент времени на некоторую величину, оставаясь далее постоянным, А.В. Лыков дал обоснование физического смысла конечной скорости распространения теплоты, представляющей собой производную по времени от глубины проникновения теплоты. Выражение (1) приводит к детерминированному уравнению переноса гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \partial T(M, t) / \partial t = a \Delta T(M, t) - \tau_r \partial^2 T(M, t) / \partial t^2 + \\ + (\tau_r / (cp)) \left[\partial F(M, t) / \partial t + (1 / \tau_r) F(M, t) \right], \quad M \in D, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и соответствующим краевым задачам теплопроводности для уравнения (2) *обобщенного вида. Обобщенные задачи переноса значительно отличаются от классических, являясь более сложными при нахождении аналитических решений этих задач. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении точных аналитических решений краевых задач для уравнения (2). Как будет показано ниже, эти аналитические значения участвуют в формировании дисперсии. В то же время необходимо отметить значительное внимание к проблеме Стефана со стороны физиков, изучающих влияние лазерного излучения на вещество [5–9].*

В настоящей работе предложено описание случайного поведения высоконестационарной теплопроводности с помощью обобщенного уравнения Фоккера-Планда-Колмогорова (в дальнейшем ФПК) для плотности вероятности (в дальнейшем ПВ), из которого получаются постановки задач для гиперболического уравнения теплопроводности. Новизна заключается в том, что стохастические постановки задач Стефановского типа гиперболической теплопроводности до сих пор отсутствовали. Библиография и основные идеи такого стохастического описания задач теплопроводности изложены в работах [2, 3], Основное положение представляется таким: решение детерминированной задачи есть среднее значение ее стохастического аналога. Актуальность проблемы заключается в том, что детерминированная задача не позволяет выявить особенности, возникающие в результате учета случайного внешнего воздействия на описываемые явления. В работе [3] показано, как дисперсия может существенно изменить представления о выводах, следующих из анализа детерминированных решений поставленных задач. Исследование временного поведения дисперсии позволило получить описанный в работе [3] эффект убывания дисперсии в начальные моменты времени. Этот эффект дает возможность планировать эксперименты, связанные с фазовыми переходами. Здесь будет рассмотрен анализ дисперсии при мощном импульсном тепловом воздействии на вещество.

Стохастическая модель задачи Стефана, учитывающая конечную скорость переноса теплоты

Стохастическая модель классической задачи Стефана, основанная на обобщенном уравнении ФПК, связанном с параболическим уравнением теплопроводности, предложена в работе [3]. Приведем постановку этой задачи. Вначале введем обозначения для стохастического описания задачи Стефана при учете конечной скорости переноса теплоты. Обозначим через $P_1(x, t, \Omega)$ плотность вероятности в пространственной области $0 \leq x \leq M_y^{(1)}(t)$ (твердая фаза), а через $P_2(x, t, \Omega)$ – плотность вероятности в пространственной области $x \geq M_y^{(1)}(t)$ (жидкая фаза), где $M_y^{(1)}(t)$ – среднее значение скорости движения границы раздела фаз; t – время; x – пространственная координата; Ω – случайная характеристика температурного поля в обеих областях. Обозначим также средние значения: $M_{Ti}^{(1)}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega P_i(x, t, \Omega) d\Omega$ ($i = 1, 2$); момент второго порядка так:

$$M_{Ti}^{(2)}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 P_i(x, t, \Omega) d\Omega, \quad (i = 1, 2); \quad \text{дисперсию} \quad \text{так:}$$

$$D_{Ti}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 P_i(x, t, \Omega) d\Omega - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega P_i(x, t, \Omega) d\Omega \right)^2 \quad (i = 1, 2). \quad \text{Введем также}$$

обозначение для ПВ, описывающей случайные процессы, происходящие на границе раздела фаз: $P_y(t, \Theta)$, здесь Θ – случайная характеристика процессов, определяющих поведение границы раздела фаз. Обозначим среднее значение зависимости от времени закона движения границы раздела фаз так: $M_y^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta P_y(t, \Theta) d\Theta$, а дисперсию –

$$D_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta^2 P_y(t, \Theta) d\Theta - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta P_y(t, \Theta) d\Theta \right)^2. \quad \text{Марковский коэффициент диффузии для}$$

случайных проявлений на границе обозначим B_Θ . Уравнение ФПК для ПВ, описывающей случайное тепловое поле в области твердого состояния, имеет вид

$$\partial P_1(x, t, \Omega) / \partial t = -\partial(A_1(x, t, \Omega)P_1(x, t, \Omega)) / \partial \Omega + 0,5B_\Omega \partial^2 P_1(x, t, \Omega) / \partial \Omega^2, \quad (3)$$

$$0 < x < M_y^{(1)}(t), \quad t > 0, \quad \Omega \in (-\infty < +\infty).$$

Здесь

$$A_1(x, t, \Omega) = \Omega(a_1 \partial^2 M_{T1}^{(1)}(x, t) / \partial x^2 - \tau_r \partial^2 M_{T1}^{(1)}(x, t) / \partial t^2) / M_{T1}^{(1)}(x, t).$$

Аналогичный вид имеет коэффициент сноса $A_2(x, t, C)$:

$$\partial P_2(x, t, \Omega) / \partial t = -\partial(A_2(x, t, \Omega)P_2(x, t, \Omega)) / \partial \Omega + 0,5B_{\Omega} \partial^2 P_2(x, t, \Omega) / \partial \Omega^2,$$

$$M_y^{(1)}(t) < x < +\infty, \quad t > 0, \quad \Omega \in (-\infty < +\infty),$$

где B_{Ω} – Марковский коэффициент диффузии; a_i ($i = 1, 2$) – коэффициенты температуропроводности в областях, соответствующих условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_i(x, t, \Omega) d\Omega = 1, \quad t \geq 0, \quad x \in (0, +\infty) \text{ и условиям на бесконечностях } P_i(x, t, \pm\infty) = 0.$$

Безусловно, классическая задача Стефана не может претендовать на описание быстропротекающих воздействий. Между медленно протекающим образованием льда при естественных природных явлениях и плавлением, когда на вещество производится кратковременное ударное тепловое воздействие, имеется различие. Хотя, отметим, даже в таком стохастическом варианте постановки классической задачи Стефана в работе [5] был выявлен эффект «странного» поведения дисперсии. Суть эффекта состоит в следующем. В начальный момент времени регулярная составляющая дисперсии равна нулю и до момента времени $t = 1/e$ ед. времени убывает, достигая минимума, равного $\min \operatorname{Re} g(1/e) = -B_{\Theta} / e$. Это означает, что на этом отрезке времени наблюдается сопротивление изменению формы фронта фазового перехода. Это явление мы называли *эффектом стремления к сохранению первоначальной формы фронта фазового перехода*. После момента времени $t = 1/e$ ед. времени это сопротивление ослабевает и прекращается в момент времени $t = 1$ ед. времени, когда $\min \operatorname{Re} g(1) = 0$. После этого начинается фаза активного искажения формы фронта фазового перехода.

Этот, казалось бы незначительный, эффект, из-за малости Марковского коэффициента диффузии B_{Θ} и времени $t = 1/e$ ед. времени, может оказаться важным при тонких технологических процессах, когда требуется как можно дольше сохранить первоначально плоскую форму либо выращиваемого кристалла, либо плоской формы твердого тела при других тепловых воздействиях, не обязательно имеющих характер фазовых превращений, например при нанесении нанопокровов. Зная, как изменяется во времени дисперсия D_y , следует ступенчато вести технологический процесс, начиная от момента времени $t = 0$ до $t = 1/e$ ед. времени. Затем произвести остановку, потом снова начать, и периодически повторять эту процедуру много раз. При этом будут нивелированы ненужные случайные воздействия, которые способствуют искажению плоской формы твердого тела, подверженного внешним и внутренним случайным воздействиям.

В настоящей работе исследуется один из вариантов стохастической постановки для ПВ задачи стефановского типа.

Приведем следующую постановку задачи для ПВ. Пусть на вещество воздействует мощный тепловой импульс, когда его длительность $1/\alpha$ сравнима с временем тепловой релаксации τ_r . Пусть на неподвижную границу действует излучение мощностью теплового потока $q_0 \exp[-\alpha t]$, а на подвижной границе действует тепловой поток мощностью $q_1 \exp[-\alpha t]$, где $q_1 > q_0$. Стохастическая постановка задачи для ПВ о быстропротекающем процессе теплопроводности при импульсном воздействии мощного излучения на вещество имеет следующий вид:

$$\partial P(x, t, \Omega) / \partial t = -\partial(A_T(x, t, \Omega)P(x, t, \Omega)) / \partial \Omega + 0,5B_{\Omega} \partial^2 P(x, t, \Omega) / \partial \Omega^2, \quad (4)$$

$$0 < x < M_y^{(1)}(t), \quad t > 0, \quad \Omega \in (-\infty < +\infty).$$

Здесь:

$$A_T(x, t, C) = \Omega P_T(x, t, \Omega) (a_1 \partial^2 M_T^{(1)}(x, t) / \partial x^2 - \tau_r \partial^2 M_T^{(1)}(x, t) / \partial t^2) / M_T^{(1)}(x, t). \quad (5)$$

$$P_T(0, t, \Omega) = \Phi_{T\text{Гран}}(t, \Omega), \quad \Omega \in (-\infty, +\infty), \quad 0 < t < +\infty. \quad (6)$$

$$\lambda \partial P_T(x, t, \Omega) / \partial x \Big|_{x=0} = q_0(t) \exp(-\alpha t) P(0, t, \Omega), \quad t > 0, \quad \Omega \in (-\infty, +\infty).$$

$$\begin{aligned} & -\lambda \partial P_T(x, t, \Omega) / \partial x \Big|_{x=M_y^{(1)}(t)} = \\ & = -\partial(\Omega L \rho(dM_y^{(1)}(t) / dt + \tau_r d^2 M_y^{(1)}(t) / dt^2 + \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & + q_1 \exp[-\alpha t]) P_T(M_y^{(1)}(t), t, \Omega) / M_T^{(1)}(M_y^{(1)}(t), t) / \partial \Omega + \\ & + 0,5 B_\Theta \partial^2 P_T(M_y^{(1)}(t), t, \Omega) / \partial \Omega^2, \quad x = M_y^{(1)}(t), \quad t > 0, \quad \Omega \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

$$P_T(x, 0, \Omega) = \Phi_{T\text{Нач}}(x, \Omega), \quad 0 \leq x \leq M_y^{(1)}(0), \quad \Omega \in (-\infty, +\infty). \quad (8)$$

$$\partial P_T(x, t, \Omega) / \partial t \Big|_{t=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad \Omega \in (-\infty, +\infty). \quad (9)$$

$$M_y(0) = M_{y0} = \text{const}. \quad (10)$$

$$dM_y(t) / dt \Big|_{t=0} = \tilde{M}_{y0} = \text{const}. \quad (11)$$

Сравнительный анализ математических ожиданий гиперболической и параболической моделей задачи Стефана

Задача для математического ожидания, соответствующая задаче (4)–(11), имеет следующий вид [8]:

$$\begin{aligned} & \tau_r \partial^2 M_T^{(1)}(x, t) / \partial t^2 + \partial M_T^{(1)}(x, t) / \partial x = a \partial^2 M_T^{(1)}(x, t) / \partial x^2, \\ & 0 < x < M_y^{(1)}(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$$M_T^{(1)}(0, t) = M_{T0}^{(1)}(0, t), \quad t > 0. \quad (13)$$

$$\lambda \partial M_T^{(1)}(0, t) / \partial x = q_0 \exp[-\alpha t], \quad t > 0. \quad (14)$$

$$-\lambda \partial M_T^{(1)}(M_y^{(1)}(t), t) / \partial x = \tau_r L \rho d^2 M_y^{(1)} / dt^2 + L \rho d M_y^{(1)} / dt + q_1 \exp[-\alpha t], \quad t > 0. \quad (15)$$

$$M_y^{(1)}(0) = M_{y0}^{(1)} = \text{const}. \quad (16)$$

$$dM_y^{(1)}(t) / dt \Big|_{t=0} = 0. \quad (17)$$

Уравнениям (12)–(17) удовлетворяют функции

$$\begin{aligned} & M_T^{(1)}(x, t) = M_{T0}^{(1)}(0, t) + \\ & + q_0 \exp[-t / \tau_r] \sin(x \sqrt{\alpha(1 - \tau_r \alpha) / a}) / (\lambda \sqrt{\alpha(1 - \tau_r \alpha) / a}). \end{aligned} \quad (18)$$

При $\alpha = 1 / \tau_r$ выражение (18) преобразуется к виду

$$M_T^{(1)}(x, t) = M_{T0}^{(1)}(0, t) + q_0 \exp[-t / \tau_r] x / \lambda. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (20), получим уравнение

$$\begin{aligned} & -\lambda \partial M_T^{(1)}(M_y^{(1)}(t), t) / \partial x = d^2 M_y^{(1)} / dt^2 + d M_y^{(1)} / dt = \\ & = -(1 / (\tau_r L \rho))(q_1 - q_0) \exp[-t / \tau_r], \quad t > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение уравнения (20)

$$M_y^{(1)}(t) = M_{y0}^{(1)} - (q_1 - q_0)[1 - \exp[-t / \tau_r]](t / \tau_r + 1) / (L \rho \tau_r). \quad (21)$$

Приведенные решения получены и описаны в работе [8]. Непосредственной подстановкой убедимся, что решения соответствующих задач для математических ожиданий $M_{TT}^{(1)}(t, x)$ и $M_{yy}^{(1)}(t)$, основанных на параболическом уравнении теплопроводности и классического закона Фурье, выглядят так:

$$M_{TT}^{(1)} = M_{TT0}^{(1)}(0, t) + q_0 \sqrt{a / \alpha} \exp[-\alpha t] \sin(x \sqrt{\alpha / a}) / \lambda. \quad (22)$$

$$M_{yy}^{(1)}(t) = M_{yy0}^{(1)} - 2\sqrt{a / \alpha} \operatorname{arctg}\{(\sqrt{q_1^2 - q_0^2} / (q_1 + q_0)) \times \\ \times \operatorname{tg}[\sqrt{q_1^2 - q_0^2} / (2L\rho)(\sqrt{(a\alpha)^{-1}}(1 - \exp(-\alpha t))]\}. \quad (23)$$

Для сравнительного анализа решений с гиперболическим и параболическим вариантами исследуемой задачи Стефана необходимо преобразовать решения (22)–(23), когда $\alpha = 1 / \tau_r$. Имеем:

$$M_{TT}^{(1)} = M_{TT0}^{(1)}(0, t) + q_0 \sqrt{a \tau_r} \exp[-t / \tau_r] \sin(x / \sqrt{a \tau_r}) / \lambda. \quad (24)$$

$$M_{yy}^{(1)}(t) = M_{yy0}^{(1)} - 2\sqrt{a \tau_r} \operatorname{arctg}\{(\sqrt{q_1^2 - q_0^2} / (q_1 + q_0)) \times \\ \times \operatorname{tg}[\sqrt{q_1^2 - q_0^2} / (2L\rho)(\sqrt{\tau_r / a}(1 - \exp(-t / \tau_r))]\}. \quad (25)$$

Графики для температурных зависимостей $M_T^{(1)}(x, t)$ и $M_{TT}^{(1)}(x, t)$ изображены на рис. 1 и рис. 2. Из этих рисунков следует, что не всегда решения задач для гиперболического и параболического уравнений носят одинаковый качественный характер. Если функция $M_{TT}^{(1)}(x, t)$ осциллирует с изменением x , то функция $M_T^{(1)}(x, t)$ строго монотонная. При тех значениях x , при которых синус в выражении (24) обращается в нуль, $M_{TT}^{(1)}(x, t)$ постоянная во времени, а $M_T^{(1)}(x, t)$ изменяется по закону экспоненты.

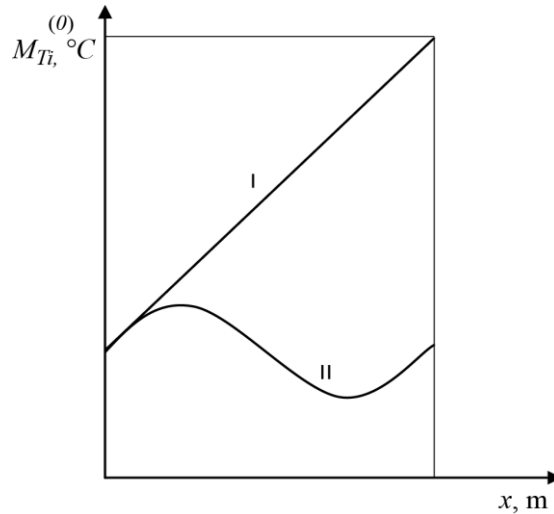


Рис.1. Зависимость температуры от пространственной координаты. $i=1$ -параболическая модель; $i=2$ — гиперболическая модель.

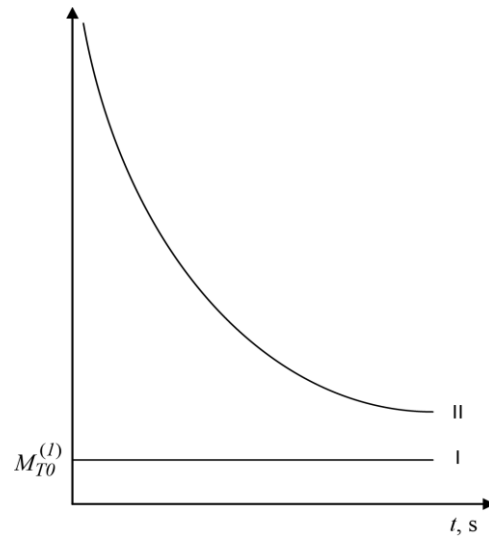


Рис.2. Зависимость температуры от времени. $i = 1$ параболическая модель; $i = 2$ гиперболическая модель.

На рис. 3 и 4 изображено поведение законов движения фронта фазового перехода $M_y^{(1)}(t)$ и $M_{yy}^{(1)}(t)$,

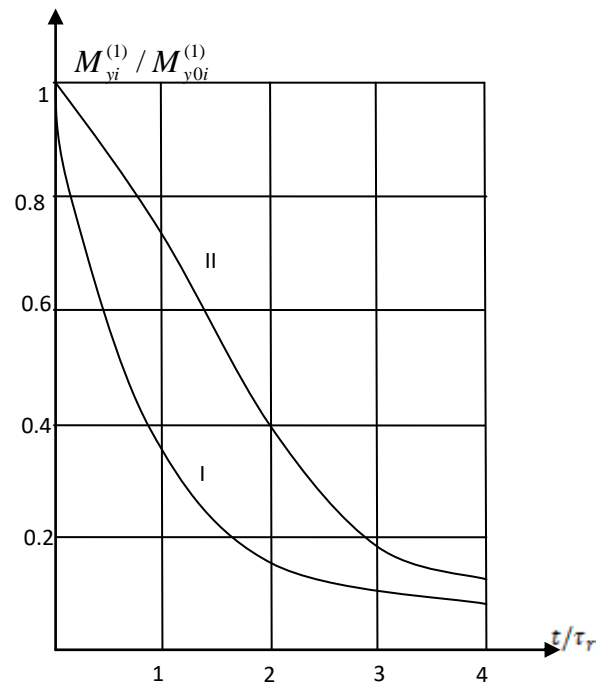


Рис. 3. Изменение положения границы раздела фаз в зависимости от времени. $i = 1$ — параболическая модель; $i = 2$ — гиперболическая модель. $\tau_r = 10^{-9} \text{ с}$; $q_0 = 10^{-2} q_1$; $a = 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$.

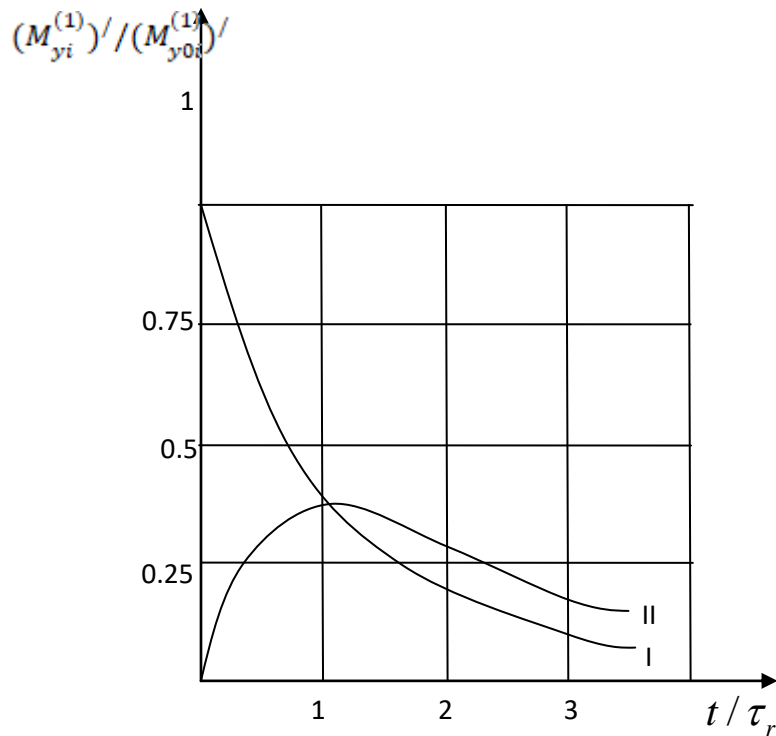


Рис. 4. Зависимость скорости перемещения границы раздела фаз от времени. $i = 1$ — параболическая модель; $i = 2$ — гиперболическая модель.

а на рис. 5 и 6 — скоростей $dM_y^{(1)}(t)/dt$ и $dM_{yy}^{(1)}(t)/dt$. Модель с параболическим уравнением предсказывает, что процесс фазового перехода начинается с максимальной скорости, которая, отметим, может быть сколь угодно велика в зависимости от соотношения q_0 и q_1 . Согласно гиперболической модели, фронт фазового перехода ускоряется от нулевой скорости до максимальной не мгновенно, а в течение некоторого времени, определяемого величиной τ_r . Максимальное значение $dM_y^{(1)}(t)/dt$ ограничено сверху постоянной $\sqrt{a/\tau_r}$. С помощью соотношений (27)–(29) можем установить связь между температурой на фронте $M_T^{(1)}(M_y^{(1)}(t), t)$ и кинематическими характеристиками фронта $dM_y^{(1)}(t)/dt$ и $d^2M_y^{(1)}(t)/dt^2$. Имеем для гиперболической модели

$$M_T^{(1)}(M_y^{(1)}(t), t) = M_{T0}^{(1)} + [(q_0 L \rho) / (\lambda (q_1 - q_0))] [\tau_r L \rho d^2 M_y / dt^2 + dM_y / dt] M_y. \quad (26)$$

В модели с параболическим уравнением получается такое соотношение:

$$M_{yy}^{(1)}(t, t) = (M_{T0}^{(1)} - (L \rho a) / \lambda) - a \tau_r L \rho d (\ln(M_{yy}^{(1)}) / dt) / \lambda. \quad (27)$$

Сравнительный анализ дисперсий параболической и гиперболической моделей задачи Стефана

Вывод уравнений для ПВ и дисперсии, соответствующих стефановским задачам, ничем не отличается от тех, которые предложены в работе [9]. Здесь приведем постановку задачи для дисперсии, соответствующей гиперболической модели исследуемой задачи Стефана (20)–(25). Это решение имеет следующий вид:

$$\partial D_T(x, t) / \partial t = [(2a\partial^2 M_T^{(1)}(x, t) / \partial x^2 - 2\tau_r \partial^2 M_T^{(1)}(x, t)) / M_T^{(1)}(x, t)] D_T(x, t) + B_\Omega, \quad (28)$$

$$t > 0, x \in (0, M_y^{(1)}(t)).$$

$$D_T(x, 0) = D_{T\text{нач}}(x) = \delta_0^2(x) (M_{T\text{нач}}^{(1)})^2, x \in [0, M_y^{(1)}(0)].$$

Дисперсия фронта фазового перехода описывается следующими уравнениями:

$$\partial D_y(x, t) / \partial t = [(2a\partial^2 M_{T2}^{(1)}(x, t) / \partial x^2) / M_{T2}^{(1)}(x, t)] D_{T2}(x, t) + B_\Theta, t > 0, x \in (M_y^{(1)}(t), +\infty). \quad (29)$$

$$D_T(x, 0) = D_{T\text{нач}}(x) = \delta_0^2(x) (M_{T\text{нач}}^{(1)})^2, x \in [M_y^{(1)}(0), +\infty). \quad (30)$$

С учетом того, что справедливы уравнения (12)–(17), уравнения (20)–(22) можно переписать, заменив правые части на левые:

$$\partial D_T(x, t) / \partial t = [\partial \ln(M_T^{(1)}(x, t))^2 / \partial t] D_T(x, t) + B_\Omega, t > 0, x \in (0, M_y^{(1)}(t)).$$

Отсюда получаем решения задач для дисперсий в виде:

$$D_T(x, t) = [\int_0^t B_\Omega d\xi / (M_T^{(1)}(x, \xi))^2 + \delta_0^2(x)] (M_T^{(1)}(x, t))^2, x \in (0, M_y^{(1)}(t)), t \geq 0. \quad (31)$$

$$D_y(t) = [\int_0^t B_\Theta dx / (M_y^{(1)}(x))^2 + \delta_0^2] (M_y^{(1)}(t))^2, t \in [0, 10], \quad (32)$$

Для параболической модели имеем:

$$D_{yy}(t) = [\int_0^t B_\Theta dx / (M_{yy}^{(1)}(x))^2 + \delta_0^2] (M_{yy}^{(1)}(t))^2, t \in [0, 10], \text{ где}$$

$$M_{yy}^{(1)}(t) = M_{yy0}^{(1)} - 2\sqrt{a\tau_r} \arctg\{(\sqrt{q_1^2 - q_0^2} / (q_1 + q_0)) \times$$

$$\times \text{tg}[\sqrt{\tau_r / a} \cdot \sqrt{q_1^2 - q_0^2} \cdot (1 - \exp(-t) / (2L\rho))]\}. \quad (33)$$

Поскольку температурный режим при случайных воздействиях на вещество неустойчив, представляет интерес исследовать искажение фронта фазового перехода. Это важно еще и потому, что сильно разнятся начальные моменты скоростей движения этого фронта в рассматриваемых моделях.

Так получается, что интегралы $\int_0^t B_\Theta dx / (M_y^{(1)}(x))^2$ и $\int_0^t B_\Theta dx / (M_{yy}^{(1)}(x))^2$ не берутся в квадратурах, поэтому предлагается находить их численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности как решение следующей задачи Коши:

$$dz / dt = 1 / (M_y^{(1)}(t))^2, M_y^{(1)}(0) = 0. \quad (34)$$

Приведем данные для расчетов некоторого материала. Плотность $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг / м³. Теплота фазового перехода $L = 1,0449 \cdot 10^7$ Дж / кг. Коэффициент теплопроводности $\lambda = 62$ Вт / (м · град). Коэффициент температуропроводности $a = 25,8 \cdot 10^{-6}$ м² / с. Время тепловой релаксации $\tau_r = 10^{-9}$ с. Начальная (максимальная) плотность падающего потока на подвижную границу $q_1 = 10^{11}$ Вт / м². Начальная (максимальная) плотность падающего потока на неподвижную границу $q_0 = 10^9$ Вт / м². Начальное положение фронта фазового перехода для гиперболической модели $M_{y0}^{(1)} = 1$ м. Начальное положение фронта фазового перехода для параболической модели $M_{yy0}^{(1)} = 1$ м. Начальная температура для гиперболической модели $M_{T0}^{(1)}(x, 0) = 20^\circ \text{C}$. Начальная температура для параболической модели $M_{TT0}^{(1)}(x, 0) = 20^\circ \text{C}$. Время импульса $1/\alpha = \tau_r$ с. Что касается Марковских коэффициентов диффузии, то их

значения не представлены ни в одном справочном издании. В настоящей работе предлагается считать их одного порядка с коэффициентом температуропроводности $B_{\Theta} = 10^{-4}$, $B_{\Omega} = 10^{-4}$.

Результаты расчетов показаны на рис. 5 и 6.

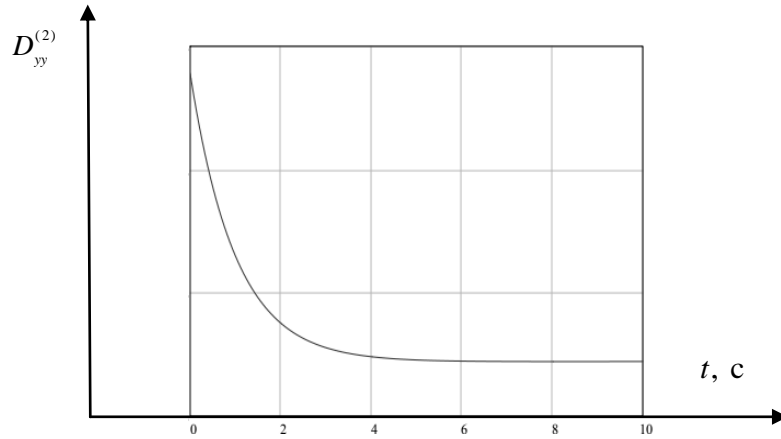


Рис. 5. Временное поведение дисперсии фронта фазового перехода для параболической модели

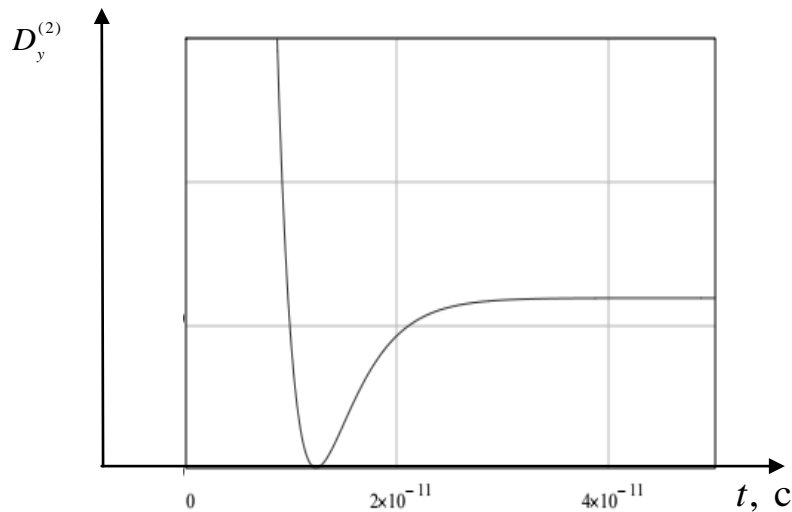


Рис. 6. Временное поведение дисперсии фронта фазового перехода для гиперболической модели

Обсудим результаты временного поведения дисперсии на фронте фазового перехода. Как и в случае стохастического рассмотрения задачи Стефана, проведенного в работе [5], здесь также наблюдается *эффект стремления к сохранению первоначальной формы фронта фазового перехода*. Как интерпретировать практическое применение этого явления для быстропротекающего процесса теплопроводности? Ведь время релаксации очень мало, можно ли извлечь пользу от выявления времени наступления наименьшего значения дисперсии, когда искажение формы фронта фазового перехода минимальное? Попробуем ответить на этот вопрос. Несмотря на то, что здесь рассматривается задача в плоской постановке, возможно провести аналогичный количественный и качественный анализ и для сферической первоначальной формы частицы. Исходя из фиксации момента наименьшей

дисперсии, можно рассчитать время импульсного воздействия, при котором наблюдается наименьшее искажение формы фронта фазового перехода, и в результате планирования эксперимента получить требуемую, возможно близкую к первоначальной, конфигурацию расплавленной частицы после ее остывания.

Заключение

В настоящее время накоплен большой математический аппарат, который детерминистическим образом описывает многие явления физической природы. Этот аппарат требует его перевода, образно говоря, на «стохастический язык». В частности, в работе [2] одного из авторов этой статьи Э.М. Карташова получены многочисленные аналитические решения оригинальных детерминированных задач по теплофизике, термоупругости и др., которые уже успешно используются на практике. В недавних работах авторов настоящей статьи продемонстрированы возможности соединения классических детерминированных представлений о физических явлениях со стохастическими. Могут быть открыты новые эффекты, помимо описанных условий устойчивости по дисперсии и экстремальных свойств дисперсии. Особую важность приобретает практическое применение результатов стохастических исследований законов движения фронта фазового перехода к проведению технологических процессов. Это, прежде всего, касается определения времени плавления и испарения микрочастиц при мощном воздействии импульсного лазерного излучения на вещество.

Литература

1. Stefan J. Under probleme derteorie der varmeleitung// Sietzber.Wien. Akad. Mat. Naturw. 1889. Bd. 98. 11a. P. 616–634.
2. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. Самара: Издательство СГТУ. 2010. 652 с.
4. Карташов Э.М., Соловьев И.А. Стохастический подход к проблеме Стефана. Известия РАН. Энергетика. 2017. №5. С 134–143./
5. Соловьев И.А, Доличанин-Декич Д.Ч. Стохастические модели. М., 2014. С. 134.
6. Zhirnov I. D.V. D.V.Kotoban , A.V. Gusarov. Evaporation-induced gas-phase flows at selective laser melting. International Journal of Heat and Mass Transfer. Volume 113, October 2017. P. 975–983.
7. Huaxia YAO. Long-Term Study of Lake Evaporation and Evaluation of Seven Estimation Methods: Results from Dickie Lake, South-Central Ontario, Canada. Earth & Environmental Sciences. Vol.1 No.2, August, 2009, PP. 59–77.
8. C. Meier, R.W. Penny, Y. Zou, J.S. Gibbs, A.J. Hart, Thermophysical phenomena in metal additive manufacturing by selective laser melting: Fundamentals, modeling, simulation and experimentation. arXiv:1709.09510v1 [physics.app-ph] 4 Sep 2017.
9. M.J. Matthews, G. Guss, S.A. Khairallah, A. Rubenchik, A.T. Anderson, P.J. Depond, W.E. King, Denudation of metal powder layers in laser powder bed fusion processes. Acta Mater. 114, 2016. P. 33–42.
10. Roscani S., Marcus E.S. Two equivalent Stefan's problems for the time fractional diffusion equation. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2013. T. 16. № 4. С. 802–815.

Авторы публикации

Карташов Эдуард Михайлович – докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики Московского технологического университета (МИТХТ). E-mail: kartashov@mitht.ru.

Соловьев Игорь Алексеевич – д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики и физики Государственного университета по землеустройству. E-mail: igorsoloviev@inbox.ru.

References

1. J. Stefan. Under probleme derteorie der varmeleitung// Sietzber.Wien. Akad. Mat. Naturw. 1889. Bd. 98. 11a. P. 616–634.
2. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. M.: Higher school, 2001. 540
3. S. Kartashov, E. M., Kudinov, V. A., Analytical theory of heat conductivity and thermoelasticity applied. Samara: Publishing house SGTU. 2010. 652 p.
4. Kartashov E.M., Solovyev I.A. Stochastic approach to the problem of Stefan. News of wounds. Energy. 2017. No. 5. From 134–143.
5. I. Solovyev, H.D Dolicanin-Jekic. Stochastic model. M.: 2014. P. 134.
6. Zhirnov I. D.V. D.V.Kotoban , A.V. Gusarov. Evaporation-induced gas-phase flows at selective laser melting. International Journal of Heat and Mass Transfer. Volume 113, October 2017. P. 975–983.
7. Huaxia YAO. Long-Term Study of Lake Evaporation and Evaluation of Seven Estimation Methods: Results from Dickie Lake, South-Central Ontario, Canada. Earth & Environmental Sciences. Vol.1 No.2, August, 2009, PP. 59–77.
8. C. Meier, R.W. Penny, Y. Zou, J.S. Gibbs, A.J. Hart, Thermophysical phenomena in metal additive manufacturing by selective laser melting: Fundamentals, modeling, simulation and experimentation. arXiv:1709.09510v1 [physics.app-ph] 4 Sep 2017.
9. M.J. Matthews, G. Guss, S.A. Khairallah, A. Rubenchik, A.T. Anderson, P.J. Depond, W.E. King, Denudation of metal powder layers in laser powder bed fusion processes. Acta Mater. 114, 2016. P. 33–42.
10. S. Roscani, E.S. Marcus Two equivalent Stefan's problems for the time fractional diffusion equation. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2013. T. 16. № 4. C. 802–815.

Authors of the publication

Eduard M. Kartashov – State Tehnological University (MITHT), Moscow, Russia. E-mail: kartashov@mitht.ru.

Igor A. Solovyev – State University of Land Management, Moscow, Russia. E-mail: igorsoloviev@inbox.ru.

Поступила в редакцию

12 декабря 2018 г.